

重力波検出器 KAGRA における防振懸架装置の制御

玉木 諒秀 (東京大学大学院 理学研究科)

Abstract

地上の重力波検出器では、高感度を達成するために鏡を地面振動から十分防振する必要がある。そこで鏡は多段振り子型の防振懸架装置で吊るされているが、共振周波数で鏡が大きく揺れてしまうためダンピング制御を行う。これにより、共振周波数における懸架装置の振動を抑えることができる一方、制御ループに混入するセンサ雑音の問題になることがある。実際、2023 年 5 月 25 日から行われた重力波の国際共同観測では 10 - 60 Hz の低周波帯において局所制御系由来の雑音が検出器の感度を制限するという問題が報告された。

この低周波帯は、たとえば質量の大きなブラックホール連星合体からの重力波に対する感度向上にとって重要であるため、制御雑音の低減が求められる。そこで KAGRA の懸架装置を対象に、振動モードに基づく最適な制御をシミュレーション上で設計し、鏡に伝わる雑音を低減できることを確かめた。

1 Introduction

1.1 KAGRA の防振懸架装置

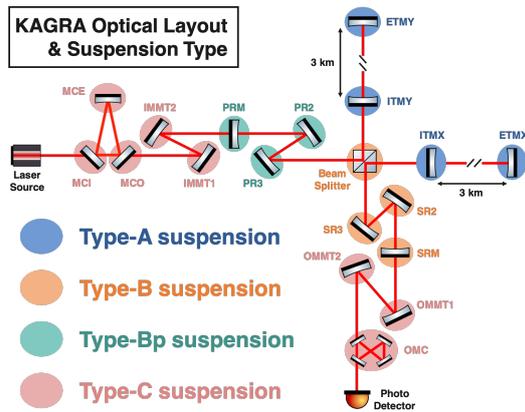


図 1: KAGRA Optical layout

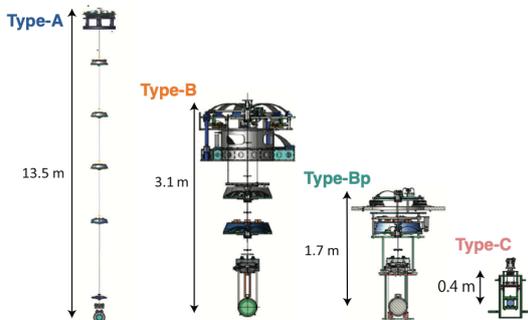


図 2: KAGRA の防振懸架装置 [1]

KAGRA はレーザー干渉計型重力波検出器であり、その干渉計は図 1 のように多数の鏡で構成される。また、それぞれの鏡は防振性能の要求に応じて異なる種類の懸架装置で吊られている (図 2)。

1.2 防振

1.2.1 受動防振

地上の重力波検出器の鏡 (テストマス) は地面振動による外乱の影響を常に受けるため、防振技術が必要不可欠である。たとえば 10^3 m スケールの基線長を持つ KAGRA の場合、 10^{-21} のオーダーの重力波ひずみを検出するためには、テストマスの変位レベルは少なくとも 10^{-18} m/ $\sqrt{\text{Hz}}$ 以下でなくてはならない。一方、地面振動雑音は 10 Hz において 10^{-11} m/ $\sqrt{\text{Hz}}$ 程度であるから、テストマスに伝わるこの雑音を 10^7 程度減衰する必要がある。そこで、テストマスを多段振り子として吊り下げることで受動的に地面振動の影響を低減する (受動防振)。

たとえば図 3 のような N 段の多段バネ-質量系によってモデル化すると、支配方程式は

$$-\omega^2 \mathbf{M} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

である。ただし、 \mathbf{M} と \mathbf{K} はそれぞれ質量行列、剛性行列であり、またここでは $\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$ ($i =$

1, 2, \dots, N) とした。よって、各段における防振比は $(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}$ を計算すれば良いが、 \mathbf{M} は各段の質量からなる対角行列であるから、 $-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}$ の行列式は $2N$ 次の多項式になることはすぐに分かる。よって、 N 段の多段バネ-質量系の最終段（懸架装置におけるテストマス）での減衰は $1/\omega^{2N}$ となる。例として $N = 1 \sim 4$ の場合、支点に対する最終段の防振比を図示すると図 4 のようになる。段数を増やすと共振以上の周波数での受動防振性能が向上するのが分かる。

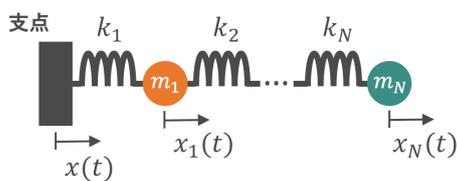


図 3: 多段バネ-質量系

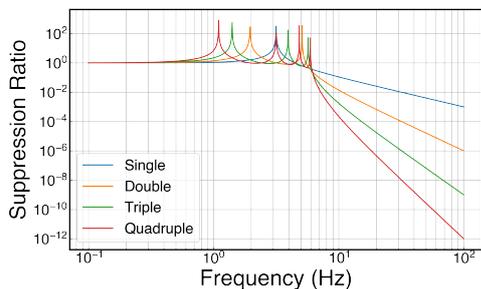


図 4: 多段バネ-質量系による防振性能

1.2.2 能動防振

多段振り子式の懸架装置では共振周波数において地面振動雑音が増幅され、テストマスが過剰に動いてしまう。これは光学系のミスアライメントを引き起こし、最終的には干渉計をロックできなくなるため、懸架装置の共振を抑制する必要がある。このような防振は、センサやアクチュエータなどを用いた能動的な制御システムによって達成される（能動防振）。具体的には、マスの変位をセンサで局所的に検出してその信号を制御器に送り、生成した駆動信号（マスの速度に比例）をアクチュエータでマスに返すフィードバック制御を施す（図 5）。このような局所的な制御を以下ではダンピング制御と呼ぶ。

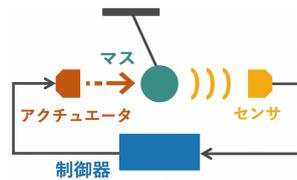


図 5: ダンピング制御の概略図

2 Motivation

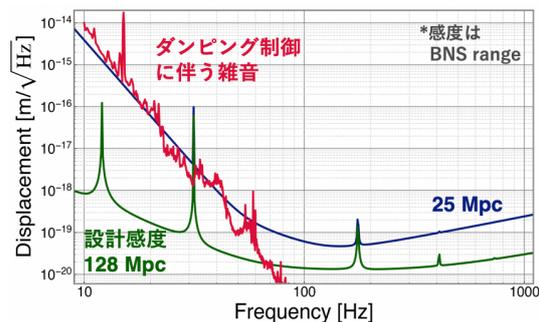


図 6: ダンピング制御雑音と設計感度

一般に、フィードバック制御系ではセンサの雑音が制御器を介してシステムにフィードバックされる（制御雑音）。制御雑音の内、特に前回の観測（2023 年 5 月 25 日-2023 年 6 月 21 日）における振り子のダンピング制御を図 6 に示す。これよりダンピング制御を改良しなければ、低周波数帯において設計感度である 128 Mpc を達成することができないと分かる。しかし低周波数帯は、たとえば質量の大きなブラックホール連星合体からの重力波に対する感度向上にとって重要であるため、ダンピング制御における制御器を最適なものにするを考える。なお、ここでの最適とは干渉計ロックのための振動減衰に関する要求を満たしつつ、ループに混入する雑音を最小化するという意味である。

3 Methods

メインの鏡を懸架する Type-A suspension 中の低温懸架装置（図 7）をモデル化して制御対象とする。なお、振動は 6 自由度あるが、簡単のため以下ではビーム軸方向の振動制御のみを考える。

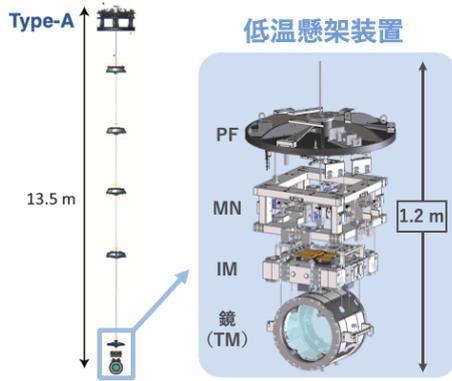


図 7: 低温懸架装置

3.1 モード制御

多段振り子の系は図 4 の赤線などで示されるように、複数のモードが存在する複雑なシステムである。従来はこれらのモードをまとめてダンピングする制御を設計していたが、モードごとによってダンピングを調整することで最適化が容易になる。たとえば、一番周波数の低いモードはエネルギーの面で支配的であり、大きなダンピングが必要である。一方、高い共振モードはそれほどダンピングを必要とせず、観測帯域に最も近いシステムにフィードバックされるセンサ雑音をなるべく減らすことの方が重要である。そこで制御対象を振り子の振動モードに基づいて分解し、そのモードごとに制御を行うことを考える。このようなモード制御自体は単なる座標変換であるからダンピング制御雑音低減に直接関係しないが、制御対象の単純化は最適な制御設計を容易にするため、結果として雑音の低減が期待される。

このモード分解は式で表すと以下ようになる。

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \\ \mathbf{x} = \Phi\mathbf{q} \end{cases} \quad (2)$$

$$\mathbf{M}_m\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_m\mathbf{q} = \mathbf{F}_m \quad (3)$$

ただし、 \mathbf{F} は制御力のベクトルであり、添字 m はモード座標系における表記を意味する。このモード分解において、各段の変位を表すベクトル \mathbf{x} は $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ の固有ベクトル Φ によってモード座標系での変位 \mathbf{q} に変換される。この上で各モードに対して制御器を設計することになる。

3.2 状態推定

モード制御の実現のためには各段のマスや位置や姿勢を測定する必要があるが、たとえばビーム軸方向のダンピング制御ではセンサ感度と雑音の観点から MN 段 (図 7) のみでセンシングを行うのが良さそうである。そこでシステムの完全な状態を得るため、

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_m \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} + \mathbf{B}_m \mathbf{u} - \mathbf{L}_m \left(\mathbf{C}_m \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} - \mathbf{y} \right) \quad (4)$$

のような状態推定を用いる。これは制御入力 \mathbf{u} とセンサ信号 \mathbf{y} を用いて対応するモード信号 $\tilde{\mathbf{q}}$ を推定するものであり、たとえば MN 段のセンサ信号からシステムの完全な状態を推定することができる。なお、 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ はシステムの運動方程式を行列表現を用いて 1 階の微分方程式に変換した状態空間方程式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} d \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

の係数 (d は地面振動による外乱であり、また直達行列 \mathbf{D} は 0 とした) であり、添字 m はそれらをモード座標に変換したことを意味する。

ここでの目標は最適な \mathbf{L}_m (オブザーバゲイン) を求めることであり、LQR 法を用いて推定器を設計する。これはコスト関数

$$J = \int_0^\infty \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^\top & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \end{bmatrix} \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix} + \mathbf{z}_m^\top \mathbf{R} \mathbf{z}_m \right) dt \quad (6)$$

を用いて

$$\mathbf{L}_m = \operatorname{argmin}(J) \quad (7)$$

として設計する。ただし、 \mathbf{Q} は状態推定の正確性を、 \mathbf{R} はセンサ雑音を重み付けする行列であり、 $\mathbf{z} = -\mathbf{L}_m^\top \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}$ とした。

まず \mathbf{Q} は、モード座標系におけるインパルス応答振幅の 2 乗を対角成分に配置する。低い方から数えて i 番目のモード周波数を f_i とするとき、各振幅は $\frac{1}{2\pi f_i M_{m,ii}}$ で与えられる。これにより、最も大きな応答を持つモードがより効率的に減衰される。

また \mathbf{R} については、テストマスの振動減衰時間 T_{decay} とテストマスに対するセンサ雑音の寄与

N_{sensor} についてコスト関数

$$J_R(\mathbf{R}) = \max(T_{\text{decay}}^2) + \max(N_{\text{sensor}}^2) \quad (8)$$

を用いて、最適なもの

$$\mathbf{R} = \text{argmin}(J_R) \quad (9)$$

を計算する。なお、ここではテストマスの振動減衰時間を 10 秒としてシミュレーションを行う。

モード制御と状態推定による制御ループは図 8 のようになる。

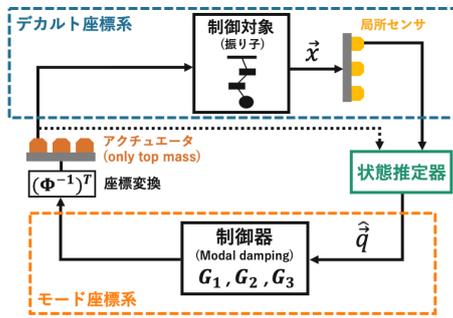


図 8: ダンピング制御ループの概略図

4 Results

ビーム軸方向の振動に対し、モード制御と状態推定を用いたダンピング制御を施したシミュレーション結果を図 9 および図 10 に示す。図 9 は周波数応答性を示しており、これより特に低周波のモードについて共振ピークを押さえられているのが分かる。また、図 10 はインパルス応答を加えたときの時間応答を示しているが、10.2 秒で振動が $1/e$ の大きさに収まるのが分かる。これは懸架装置の振動が収まる時間の目安であり、KAGRA における要求値 60 秒を充分満たしている。

またビーム軸方向の振動に対する制御について、テストマスに伝わる雑音（環境雑音および測定雑音としてそれぞれ地面振動雑音とセンサ雑音を使用）を図 11 に示す。これよりモード制御と状態推定を用いることで 10 Hz 以上の観測帯域において雑音性能が大きく改善し、要求値を下回ることができたのが分かる。

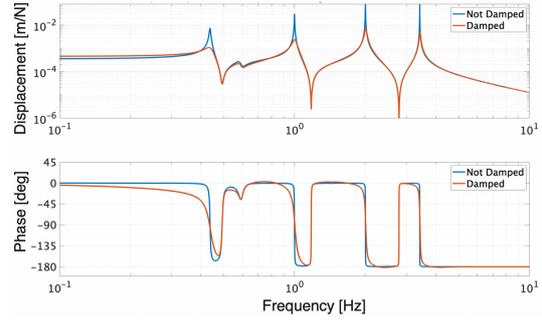


図 9: ダンピングの結果（周波数応答）

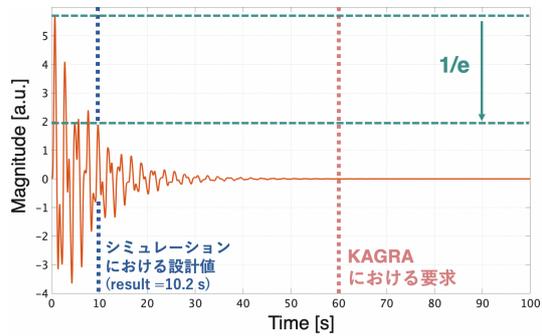


図 10: ダンピングの結果（時間応答）

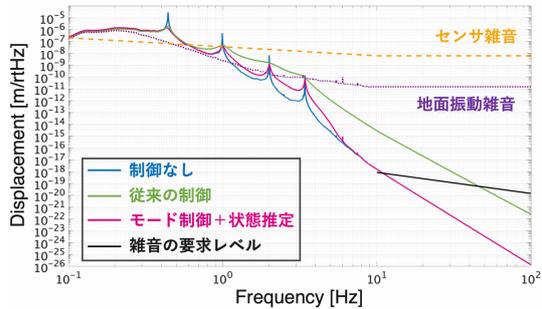


図 11: ダンピング制御雑音の低減

5 Conclusion & Outlook

シミュレーションにより、モード制御と状態推定を用いることでダンピング制御雑音を低減できる可能性を示した。現在、これを実験で確かめる準備を行なっている。

Reference

[1] Y. Akiyama et al., 2019, *Class. Quantum Grav.* **36** 095015