

修士論文

KAGRA における
低温懸架装置の特性評価と制御

(Characterization and Control of Cryogenic Suspension in KAGRA)

東京大学大学院 理学系研究科
物理学専攻 三代木研究室

35-216065

玉木諒秀

2023 年 1 月 6 日 提出

2023 年 1 月 27 日 最終版提出

KAGRA における低温懸架装置の特性評価と制御

東京大学理学系研究科物理学専攻 玉木諒秀

指導教員 三代木伸二

要旨

2015年9月、アメリカの重力波望遠鏡 LIGO が初めて重力波の直接検出に成功した。それ以降も LIGO およびイタリアの重力波望遠鏡 Virgo によって共同観測が行われて国際重力波観測ネットワークが構築され、2023年1月現在、約90の重力波イベントが検出されている。こうして開幕した重力波天文学は、国際重力波観測ネットワークがさらに広がることによって、今後も発展していくと期待されている。また、日本の重力波望遠鏡 KAGRA も国際重力波観測ネットワークへ参入し、波源の方向決定精度の向上や重力波の偏極の観測に貢献することを目指している。2020年4月にドイツの重力波望遠鏡 GEO 600 と初めて重力波の共同観測 (O3GK) をおこなった KAGRA は2023年3月、LIGO・Virgo と共同観測 (O4) を行う予定である。

KAGRA は熱雑音低減のためにサファイア鏡を 20 K まで冷却するという、これまでの重力波検出器にはない特徴を持っており、O4 では 10 Mpc という目標感度達成のために鏡を冷却して観測を行う。しかし、鏡が常温のまま観測を行った O3GK と異なり、O4 では鏡の冷却によって鏡を吊るす懸架装置の物性が変化し得る。このため、常温で動作していた制御が低温でも動作するかどうかは自明ではない。また、干渉計の安定な動作のためには共振周波数での振動を抑えるダンピング制御が必要であるが、O3GK では 10 ~ 50 Hz の低周波帯において、サファイア鏡を吊るす低温懸架装置の制御系由来の雑音が検出器の感度を制限していた。この周波数帯は中性子星連星からの重力波のうち、インスパイラルフェイズの周波数に含まれ、中性子星の質量を得るための解析に用いられる。こうして得られた中性子星の質量は、合体フェイズ以降の重力波から得られる中性子星の構造と合わせることで、中性子星物質の状態方程式に制限をつけることができると考えられている。それが実現すれば天文学や宇宙物理学、さらには原子核物理や素粒子物理など幅広い分野の発展につながる。その実現のためにも O4 では低周波における制御雑音の低減が求められる。

このような背景を踏まえ、以下の通り研究を行なった。まず2022年12月現在、82 K まで冷却された低温懸架装置の1つに対してその特性（懸架装置の共振周波数や Q 値、制御系のためのフォトセンサの出力や伝達関数）が常温と比べてどのように異なるかを調べた。また、低温懸架装置に対して KAGRA における振動減衰の要求を満たすようなダンピング制御を設計した上で、それが低温でも成り立つかどうか調べた。さらに、観測段階で用いるための低雑音な制御フィルタ（Observation フィルタ）を新たに設計し、実装した。

その結果、冷却に伴う低温懸架装置の異常は見受けられなかった。また、常温において振動減衰の要求を満たすように設計したダンピング制御が、ゲインの変更さえすれば低温でも成り立つことを確認した。さらに、新たに設計・実装した Observation フィルタを用いることで、10 ~ 50 Hz における低温懸架装置の制御雑音を 2 ~ 3 桁低減し、その上で検出器の安定な動作に成功した。

Characterization and Control of Cryogenic Suspension in KAGRA

by Masahide Tamaki

Supervisor: Shinji Miyoki

Abstract

In September 2015, LIGO, gravitational-wave observatories in America, succeeded in directly detecting gravitational waves for the first time. Since then, the international gravitational wave observation network has been established through joint observations by LIGO and Virgo, a gravitational-wave detector in Italy and about 90 gravitational wave events have been detected by January 2023. The gravitational wave astronomy thus opened is expected to develop as the international gravitational wave observation network expands further. KAGRA, a Japanese gravitational wave telescope, aims to join the international gravitational wave observation network, and contribute to the improvement of the accuracy in determining the direction of the wave source and the observation of the polarization of gravitational waves. In April 2020, KAGRA conducted its first joint observation (O3GK) with GEO 600, a gravitational wave telescope in Germany, and will conduct a joint observation (O4) with LIGO and Virgo in March 2023.

KAGRA has a unique feature of cooling the sapphire mirror down to 20 K to reduce thermal noise, which is not found in past gravitational wave detectors, and the mirror will be cooled to achieve a target sensitivity of 10 Mpc in O4. However, unlike O3GK, where observations were made with the mirror at room temperature, the cooling of the mirror changes the properties of the suspension system, which may cause some anomalies or break down the control system that has worked well at room temperature. Moreover, the damping control is necessary to suppress the vibration for the stable operation of the interferometer, but the sensitivity of the detector in O3GK was limited by the noise from the control of the cryogenic suspension system in the low frequency band of 10 ~ 50 Hz. This frequency band corresponds to the frequency of the inspiral phase of gravitational waves from neutron star binaries, and the neutron star mass can be obtained from the waveform. The neutron star masses thus obtained, together with the neutron star structure derived from the gravitational waves during the merger phase and later, are considered to be able to put a limit on the equation of state of neutron star matter. The realization of such a method will lead to the development of a wide range of fields such as astronomy, astrophysics, nuclear physics, and particle physics. In order to realize it, the reduction of control noise at low frequencies is required in O4.

Then, we investigated how the output of the photosensor, transfer function, and Q-value change for one of the cryogenic suspensions cooled down to 82 K as of December 2022. We have also designed a damping control for the cryogenic suspension to satisfy the requirement for damping in KAGRA, and have examined whether the damping control is valid at low temperatures or not. Furthermore, a new low-noise control filter (observation filter) was designed and implemented for use in the observation phase.

As a result, no abnormality was found in the cryogenic suspension system due to cooling. It is also confirmed that the damping control designed at room temperature is valid at low temperatures as long as the gain is tuned. Furthermore, by using a newly designed and implemented observation filter, the control noise of the cryogenic suspension at 10 ~ 50 Hz was reduced by 2 ~ 3 orders of magnitude, and the detector was successfully operated stably.

目次

要旨	ii
Abstract	iii
図目次	v
表目次	vi
1 序論	1
1.1 研究背景	1
1.2 本研究の主題・論文の構成	2
2 重力波とレーザー干渉計型重力波検出器	5
2.1 重力波	5
2.1.1 重力波の導出	5
2.1.2 重力波の伝播	7
2.1.3 重力波の輻射	9
2.1.4 主な重力波源	10
2.1.4.1 コンパクト連星合体（チャープ波）	11
2.1.4.2 パルサー（連続波）	11
2.1.4.3 超新星爆発（バースト波）	11
2.1.4.4 宇宙背景重力波	12
2.1.5 重力波観測の貢献	12
2.1.5.1 マルチメッセンジャー天文学	12
2.1.5.2 重力理論	12
2.2 レーザー干渉計型重力波検出器	13
2.2.1 Michelson 干渉計	13
2.2.1.1 原理	13
2.2.1.2 重力波に対する応答	14
2.2.2 Fabry-Pérot Michelson 干渉計	15
2.2.2.1 Fabry-Pérot 共振器	15
2.2.2.2 原理	17
2.2.2.3 重力波に対する応答	18
2.2.3 DRFPMI	20
2.2.3.1 パワーリサイクリング	21
2.2.3.2 Resonant Sideband Extraction	22

2.2.4	レーザー干渉計型重力波検出器の雑音源	23
2.2.4.1	量子雑音	24
2.2.4.2	熱雑音	24
2.2.4.3	地面振動雑音	25
2.2.5	世界のレーザー干渉計型重力波検出器	26
2.2.5.1	現在運用されている重力波検出器	26
2.2.5.2	計画中の重力波検出器	27
3	懸架系による防振	29
3.1	受動防振	29
3.1.1	単振り子	29
3.1.2	2段振り子	31
3.1.3	多段振り子	32
3.2	KAGRAにおける防振懸架系の概要	34
3.2.1	KAGRAにおける防振懸架系の位置	34
3.2.2	防振懸架系	35
3.2.3	干渉計の制御フェイズと要求値	36
3.2.4	懸架系の自由度	37
4	KAGRA Type-A Suspension	39
4.1	Type-A Tower	40
4.1.1	機構	40
4.1.1.1	IP pre-isolation ステージ	40
4.1.1.2	GAS フィルタチェーン	41
4.1.1.3	BF	42
4.1.2	センサ・アクチュエータ	42
4.1.2.1	LVDT	42
4.1.2.2	Geophone	43
4.1.2.3	Folded Pendulum 加速度計	45
4.1.2.4	コイルマグネットアクチュエータ	46
4.2	低温懸架装置 (Cryogenic Payload)	47
4.2.1	機構	47
4.2.1.1	PF	47
4.2.1.2	MN	47
4.2.1.3	IM	48
4.2.1.4	TM	49
4.2.2	センサ・アクチュエータ	50
4.2.2.1	OpLev	50
4.2.2.2	フォトセンサ	50
4.2.2.3	コイルマグネットアクチュエータ	51
4.2.3	冷却システム	51
5	低温懸架装置の特性評価	53
5.1	特性評価の目的	53
5.2	室温と低温下での特性の比較	54

5.2.1	フォトセンサの出力	54
5.2.1.1	測定結果	54
5.2.1.2	考察	56
5.2.2	共振周波数・伝達関数	56
5.2.2.1	測定結果	56
5.2.2.2	考察	58
5.2.3	機械的 Q 値	59
5.2.3.1	測定方法	59
5.2.3.2	測定結果	60
5.2.3.3	考察	61
6	ダンピング制御	63
6.1	ダンピング制御とその必要性	63
6.2	ダンピング制御の原理	65
6.3	ダンピングフィルタの実装とその評価	68
6.3.1	共振ピークの同定と行列計算	68
6.3.2	ダンピングフィルタの実装とその効果	70
6.3.3	1/e 減衰時間によるダンピング制御の評価	72
6.4	冷却した際の制御の変更	76
7	制御雑音の低減	77
7.1	制御雑音	77
7.2	制御フィルタの変更	78
7.2.1	ITMX Length	78
7.2.2	ITMX Pitch	80
7.3	制御雑音の測定	81
7.3.1	測定方法	81
7.3.2	測定結果	82
7.4	制御雑音低減のまとめ	84
8	結論	85
8.1	結論	85
8.2	今後の展望	85
補遺 A	反バネ効果による低周波防振	87
A.1	IP	87
A.1.1	動作原理	87
A.1.2	減衰性能	90
A.2	GAS フィルタ	93
A.2.1	動作原理	93
A.2.2	減衰性能	94
A.2.3	熱ドリフト	95
補遺 B	Optical Lever	97
B.1	OpLev を用いた鏡の変位の測定原理	97
B.2	KAGRA の低温懸架系における OpLeV	99

補遺 C 反射型フォトセンサ	103
C.1 反射型フォトセンサの理論式	103
補遺 D 伝達関数一覧	105
参考文献	113
謝辞	117

目次

2.1	重力波の偏光モード	9
2.2	Michelson 干渉計	13
2.3	Fabry-Pérot Michelson 共振器	15
2.4	Fabry-Pérot 共振器の強度透過率	17
2.5	Fabry-Pérot Michelson 干渉計	18
2.6	Michelson 干渉計と FPMI の周波数応答	20
2.7	DRFPMI 干渉計	21
2.8	SRC のモード	22
2.9	光の散射雑音スペクトルの概念図	23
2.10	KAGRA の感度曲線	23
2.11	NHNM/NLNM と世界中の地面振動のスペクトル	25
2.12	地面振動雑音のスペクトル	26
3.1	単振り子による受動防振のモデルと地面振動に対する防振比	30
3.2	2 段振り子のモデルと単振り子との比較	31
3.3	N 段振り子のモデルと防振比の比較	32
3.4	KAGRA の Optical Layout	35
3.5	3 種類の懸架系	36
3.6	干渉計の制御フェイズ	36
3.7	懸架系の運動の自由度	38
4.1	Type-A Suspension の全体図および低温懸架系部分	39
4.2	IP pre-isolation ステージ	40
4.3	GAS フィルタ	41
4.4	LVDT の概要図	43
4.5	LVDT と Geophone による IP の制御	44
4.6	Geophone の周波数応答	45
4.7	FP 加速度計	46
4.8	プラットフォーム (PF) とボールネジ型ムービングマス	47
4.9	マリオネット (MN) とマリオネットリコイルマス (MNR) , およびロープウェイ型ムービングマス	48
4.10	中間マス (IM) と中間リコイルマス (IRM)	49
4.11	テストマス (TM) とそのリコイルマス (TMR)	49
4.12	Payload に関係のあるセンサ・アクチュエータ	50
4.13	反射型フォトセンサとその動作原理	51

4.14	低温懸架系の冷却システム	52
5.1	ETMX の低温懸架装置の温度	53
5.2	フォトセンサの出力 (ETMX MN) の変化	54
5.3	フォトセンサの出力 (ETMX IM) の変化	55
5.4	温度ごとのフォトセンサの出力	55
5.5	室温と低温での伝達関数の比較 (L)	57
5.6	室温と低温での伝達関数の比較 (P)	57
5.7	室温と低温での伝達関数の比較 (Y)	58
5.8	励起信号を切った後の減衰の様子	60
5.9	室温と低温での Q 値の比較	61
6.1	共振周波数における振動の増幅	63
6.2	ダンピング制御のダイアグラム	64
6.3	ナイキスト軌跡とボード図	65
6.4	バネ振子によるモデル	66
6.5	共振の様子を示す曲線	67
6.6	1 次のハイパスフィルタ・ローパスフィルタ	67
6.7	懸架系の応答 (ETMY MN Y)	69
6.8	ダンピングフィルタ	71
6.9	ダンピングフィルタをかけた時の伝達関数	71
6.10	励起した共振が収まる様子	72
6.11	1/e 減衰時間 (ETMX)	73
6.12	1/e 減衰時間 (ETMY)	73
6.13	1/e 減衰時間 (ITMX)	74
6.14	1/e 減衰時間 (ITMY)	74
6.15	82 K における 1/e 減衰時間 (ETMX)	76
7.1	制御雑音	77
7.2	フォトセンサのエラー信号 (ITMX MN L)	79
7.3	Observation フィルタ (ITMX L)	79
7.4	Observation フィルタ (ITMX P)	80
7.5	FPMI の構成と DARM 信号	81
7.6	ITMX MN P の出力から DARM 信号までの伝達関数	81
7.7	Observation フィルタの効果	82
7.8	懸架装置, 自由度ごとの制御雑音	83
7.9	ETMX の制御雑音	83
7.10	FPMI の安定性	84
8.1	O5 観測での目標感度と現在の制御雑音	86
A.1	IP の動作原理	87
A.2	おもりの質量を変えたときの IP のポテンシャルエネルギー	89
A.3	おもりの質量を変えたときの IP の共振周波数の変化	90
A.4	地面の運動から IP のおもりまでの伝達関数	91
A.5	CoP (Center of Percussion)	92

A.6	カウンターウェイト	92
A.7	カウンターウェイトの質量を変えたときの IP の防振比	93
A.8	GAS フィルタの概略図	94
B.1	鏡の回転に対する OpLev 光のずれ	98
B.2	鏡の L 方向のずれに対する OpLev 光のずれ	98
B.3	レンズの後ろにあるビーム位置を感知する第 2 のビーム変位センサ	98
B.4	QPD	99
B.5	KAGRA における tilt-sensing OpLeV のセットアップ	100
B.6	KAGRA における length-sensing OpLeV のセットアップ	100
C.1	反射型フォトセンサの 2 次元モデル	103
C.2	反射型フォトセンサの応答	104

表目次

4.1	GAS フィルタの板バネのパラメタ (Type-A)	42
4.2	Geophone (L-4C) の各パラメタ	45
4.3	コイルドライバ (Tower)	47
4.4	コイルドライバ (低温懸架系)	51
5.1	フォトセンサの出力の平均値およびばらつき	56
5.2	共振周波数 (ETMX MN L)	58
5.3	共振周波数 (ETMX MN P)	58
5.4	共振周波数 (ETMX MN Y)	58
5.5	Q 値 (ETMX MN L)	60
5.6	Q 値 (ETMX MN P)	60
5.7	Q 値 (ETMX MN Y)	61
6.1	共振周波数 (ETMX)	69
6.2	共振周波数 (ETMY)	69
6.3	共振周波数 (ITMX)	69
6.4	共振周波数 (ITMY)	70
6.5	1/e 減衰時間 (ETMX)	75
6.6	1/e 減衰時間 (ETMY)	75
6.7	1/e 減衰時間 (ITMX)	75
6.8	1/e 減衰時間 (ITMY)	75
6.9	1/e 減衰時間 (ETMX 82 K)	76
A.1	IP の脚の質量, 長さおよびフレクシャの回転バネ定数	89

第 1 章

序論

1.1 研究背景

重力波とは、物体の加速度運動によって生じた時空の歪みが波として光速で伝播する現象である。1916年に A. Einstein が一般相対性理論を用いてその存在を予言し [1, 2], 1974年に R. A. Hulse と J. H. Taylor らが発見した連星パルサー PSR B1913+16 の公転周期の観測によって存在が間接的に証明された [3, 4]. そして 2015 年 9 月 14 日、アメリカの重力波検出器 LIGO[5] がブラックホール連星合体に伴う重力波をとらえ、初の重力波直接検出を果たした [6]. これは人類が宇宙を観測する新たな手段を手に入れたという点で非常に有意義なものであり、またこれまでよりも強い重力環境における一般相対性理論の検証も可能になった [7, 8]. さらにその 2 年後の 2017 年 8 月 17 日には LIGO とイタリアの重力波検出器 Virgo[9] が中性子星連星合体に伴う重力波を初検出し [10], 同月には中性子星連星合体からの重力波とショートガンマ線バーストが同時観測され [11], そして電磁波によるフォローアップ観測で母天体が特定された [12]. これは重力波を含めたマルチメッセンジャー天文学の始まりであり、電磁波・ニュートリノ観測に重力波観測を組み合わせることによって、天文学は新しい時代に突入した [13].

LIGO や Virgo, さらに日本の KAGRA[14] といった地上の大型重力波検出器はレーザー干渉計型重力波検出器と呼ばれる。これらは Michelson 干渉計を基本とし、基線長の潮汐的な微小変位を計測することで重力波を検出する [5]. このうち KAGRA は 2020 年 4 月にドイツの重力波望遠鏡 GEO 600[15] との共同観測 (O3GK) を行ない、さらに 2023 年 3 月からは LIGO と Virgo との O4 (Observation 4) 観測に参加することを予定している。

さらに KAGRA は地下（岐阜県飛騨市神岡町）に建設され [16], またサファイア製の鏡を 20 K という極低温まで冷やす [17] という点で先進的な重力波検出器であり、これらの技術は Einstein Telescope など次世代の重力波検出器にも応用される [18]. ここで、KAGRA が地下へ建設されたのは地下の方が地上に比べて地面振動が 1/100 程度であり、地面振動の影響を抑えることができるからである。そして、さらに地面振動の影響を抑えるため、KAGRA では多段振り子を用いて懸架装置で鏡を吊るしている。また、KAGRA が鏡を極低温に冷却するのは、鏡や懸架装置を構成する原子の熱振動（ブラウン運動）を抑え、熱雑音を低減することができるからである。そして、さらに熱雑音を低減するため、低温において高い機械的 Q 値を示すサファイア製の鏡 ($Q \sim 10^8$) を同じくサファイア製のファイバー ($Q \sim 10^7$) で吊るして冷却している [19].

低温懸架装置に関わる O3GK での問題点は大きく 2 つある。1 つ目の問題として、O3GK では鏡が常温

の状態を観測が行われたため、低温懸架装置の冷却によって起こりうる問題点の検証ができなかったことが挙げられる [20]. よって、低温にすることで懸架装置の特性がどのように変化するかということを調べるのは重要な課題の1つである. もう1つの問題点としては、10 ~ 50 Hz の周波数帯において、低温懸架装置の制御雑音が感度を制限していたことが挙げられる [20]. KAGRA を重力波検出器として作動させるためには、低温懸架装置の位置や姿勢を制御する必要があるが、その制御由来の雑音が 10 ~ 50 Hz 程度で支配的となっていた. よって、低温懸架装置の制御雑音の低減は重要な課題である.

1.2 本研究の主題・論文の構成

次回の O4 観測では感度向上のために懸架装置を極低温まで冷却して運転する. しかし、冷却する際に物性が変わることによって、懸架装置に異常が生じたり、伝達関数や Q 値などが変化して制御に変更の必要性が生じる可能性がある. そこで、現在 80 K ほどまでに冷却された低温懸架装置において、室温と低温における低温懸架装置の特性（フォトセンサの出力、伝達関数、Q 値）を比較した.

また、懸架装置の制御は重力波検出器の安定な運用に欠かせないものである. 重力波検出器では多段振り子を用いることで、共振周波数より高い周波数において地面振動の影響を抑えている. しかし、振り子の共振周波数では鏡に伝わる地面の振動が増幅されてしまう. そこで、懸架装置の変位を局所的にセンサで検出し、速度に比例した力をアクチュエータを通じてフィードバックすることによって振動を減衰させるダンピング制御を行う. この制御によって、地震などの大きな外乱があっても、共振モードを素早く抑えて干渉計をロック（共振器を共振状態に保つことをそう呼ぶ）することができ、観測時間を伸ばすことに繋がる. 本研究ではサファイア鏡を吊るした低温懸架装置について、KAGRA における要求を満たすようなダンピング制御を行った.

一方、ダンピング制御を実装することによって O3GK で問題となったように、10 ~ 50 Hz の低周波数帯で制御雑音が感度を制限してしまう. これはダンピング制御のようなフィードバック制御では、外乱を抑制しようとするすると制御雑音が大きくなってしまいうというジレンマが存在するからである. しかし、干渉計が一度ロックした後は、それほど強い制御が必要なわけではない. よって、干渉計が安定に動作する限り、なるべく雑音が生じない制御に移行することが望ましい. そこで、観測状態で用いる制御として、制御雑音を可能な限り生まないようなものを設計し実装した. その結果、現在の KAGRA の感度に対して低温懸架装置の制御雑音が十分小さく、またその制御を用いて干渉計が安定に動作することを確認した.

本研究で制御雑音を低減した 10 ~ 50 Hz という低周波は、KAGRA が観測対象としている中性子星連星からの重力波のうち、インスパイラルフェイズの周波数にあたる. インスパイラルフェイズとは、連星がお互いに共通重心の周りを公転しながら近づいていく段階であり、ポスト・ニュートン近似によるインスパイラルフェイズの波形を具に観測することで中性子星の質量が得られる [21]. こうして得られた中性子星の質量は、合体フェイズ以降の重力波から得られる中性子星の構造と合わせることで、中性子星物質の状態方程式に制限をつけることができると考えられている. それが実現すれば、宇宙物理学や天文学だけでなく、素粒子物理や原子核物理など幅広い分野の発展につながる.

本論文ではまず、第 2 章で一般相対性理論を用いて重力波を導出し、その基本的な性質を述べる. また、レーザー干渉計型重力波望遠鏡の原理や雑音源についてまとめる. 第 3 章では懸架装置による防振の原理と KAGRA における防振装置について述べる. 第 4 章では KAGRA の Type-A Suspension について、主に低温懸架装置の機構と用いられるセンサ・アクチュエータについて詳しく紹介し、その冷却法について述べる. 第 5 章では低温懸架装置の特性評価について測定結果と考察をまとめる. 第 6 章では低温懸架装置のダンピング制御についてその必要性と原理について詳しく述べる. そして設計した制御フィルタを紹介し、

KAGRA における要求を満たす制御が行えたことを示す。第 7 章ではフィードバック制御において外乱の抑制と雑音の低減がトレードオフの関係にあることを示す。その後、観測段階で用いる、低雑音かつ安定な制御の設計とその効果についてまとめる。そして、第 8 章で本研究のまとめと今後の展望を記す。

第 2 章

重力波と レーザー干渉計型重力波検出器

重力波とは、一般相対性理論から導かれる時空の歪みが波として光速で伝播する現象である。重力波は、非常に強い透過力を持っており、新しい観測手段として宇宙物理学を進歩させることができると期待されている。

この章では重力波の導出や性質、および主な波源について述べた後、レーザー干渉計型重力波検出器について記す。

2.1 重力波

2.1.1 重力波の導出

一般相対性理論では 4 次元 Riemann 時空を用いて時間 (1 次元) と空間 (3 次元) を表す。この時空において、無限に近接する 2 点間の距離は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3), \quad (2.1)$$

と定義される。ここで x^0 は時間座標、 x^i ($i = 1, 2, 3$) は空間座標を表す。なお、本論文ではこれ以降、ギリシャ文字の添字が 0,1,2,3, ローマ文字の添字が 1,2,3 を表すものとする。式 (2.1) より、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は対称テンソルであり、一般相対論における時空の性質 (重力場の性質) を表すことが分かる。

一方、時空上のある点で局所 Lorentz 系をとった時、その点において時空は平坦であり、Minkowski 時空と呼ばれる。また、その時空の計量は

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

と表される。

さて、重力場を含む時空は Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

で記述される。

ここで $G_{\mu\nu}$ は Einstein テンソル、 $R_{\mu\nu}$ は Ricchi テンソル、 G は重力定数、 c は光速、 $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運

動量テンソルである。なお,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_{\rho}g_{\sigma\nu} + \partial_{\sigma}g_{\rho\nu} - \partial_{\nu}g_{\rho\sigma}), \quad (2.4)$$

$$R_{\mu\rho\nu}^{\alpha} = \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}, \quad (2.5)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}, \quad (2.6)$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

である ($\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ は Christoffel 記号, $R_{\mu\rho\nu}^{\alpha}$ は Riemann テンソル, R は Ricchi スカラー)。つまり Einstein 方程式 (2.3) の左辺が時空の性質, 右辺が物質場を表している。よって Einstein 方程式は, 質量-エネルギー分布が時空の歪みを作り出しと解釈することができ, さらに物質の変動が重力場の変動をもたらすことも示している。

Einstein は, 平坦な時空に微小な線形摂動が存在する弱い重力場を考えることで重力波を導いた。この微小線形摂動を $h_{\mu\nu}$ とすると, 摂動を含む計量は Minkowski 計量 (2.2) を用いて

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

と書き表される。以下ではこのように線形下された一般相対性理論において, 重力波を導出する。はじめに

$$h \equiv \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (2.10)$$

を定義する。ここで,

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} = h - 2h = -h, \quad (2.11)$$

であることから,

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}, \quad (2.12)$$

となる。また, ダランベール演算子 $\square \equiv \eta_{\mu\nu}\partial^{\mu}\partial^{\nu} = \partial_{\mu}\partial^{\mu}$ を用いると Ricchi テンソルおよび Ricchi スカラーは

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(\square\bar{h}_{\mu\nu} - \partial^{\alpha}\partial_{\mu}\bar{h}_{\alpha\nu} - \partial^{\alpha}\partial_{\nu}\bar{h}_{\alpha\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square\bar{h}\right), \quad (2.13)$$

$$R = -\frac{1}{2}(-\square\bar{h} - 2\partial^{\alpha}\partial^{\mu}\bar{h}_{\alpha\mu}), \quad (2.14)$$

となる。これより Einstein 方程式 (2.3) の左辺は

$$-\frac{1}{2}(\square\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} - \partial^{\alpha}\partial_{\nu}\bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^{\alpha}\partial_{\mu}\bar{h}_{\nu\alpha}), \quad (2.15)$$

となるので, 式 (2.3) を書き直すと

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} - \partial^{\alpha}\partial_{\nu}\bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^{\alpha}\partial_{\mu}\bar{h}_{\nu\alpha} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

ここで真空の場合 ($T_{\mu\nu} = 0$) を考え, さらに Lorenz ゲージ条件

$$\frac{\partial\bar{h}_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0, \quad (2.17)$$

を課す¹. すると線形化された Einstein 方程式は

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.18)$$

となる. これが線形化された一般相対性理論における重力場の振る舞いを記述する式である.

2.1.2 重力波の伝播

式 (2.18) は平面波解を持ち, 計量の揺らぎ $\bar{h}_{\mu\nu}$ が光速で伝播することを表す. この平面波解が重力波である. 以下では重力波の伝播とその性質について考える.

式 (2.17) の Lorenz 条件はゲージを完全に決めていない. そのため, Lorenz 条件を満たす座標系 x^μ に対し,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu, \quad (2.19)$$

$$\square \xi_\mu = 0, \quad (2.20)$$

のような変換を考えた場合 Lorenz 条件は破られない. ここで, 平坦な時空の場合 \square と ∂_μ が可換であることを考えると

$$\xi_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha, \quad (2.21)$$

に対して $\square \xi_{\mu\nu} = 0$ が成り立つことが分かる. よって式 (2.20) を用いてゲージ自由度を固定すると $\bar{h}_{\mu\nu}$ の自由度を 4 つ減らすことができる. つまり, Lorenz 条件の 4 式および式 (2.20) の 4 式で $\bar{h}_{\mu\nu}$ の自由度は 2 つとなる.

次に, その 2 つの自由度で $\bar{h}_{\mu\nu}$ を書き表す. トレースが $\bar{h} = 0$ となるように ξ^0 を, また $h^{0i}(x) = 0$ となるように $\xi^i(x)$ を選ぶ. このとき $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ であるから, Lorenz 条件において $\mu = 0$ とおいた式

$$\partial^0 h_{00} + \partial^i h_{0i} = 0, \quad (2.22)$$

より,

$$\partial^0 h_{00} = 0 \quad (\because h_{0i} = 0), \quad (2.23)$$

¹ Lorenz ゲージ条件は以下に示す通り, 常に課することができる.

座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ に対して

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu}(x') = \bar{h}_{\mu\nu}(x) - \partial_\mu \xi_\nu(x) - \partial_\nu \xi_\mu(x) + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha(x),$$

となる. また,

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}(x) \rightarrow (\partial^\nu \bar{h}'_{\mu\nu})'(x') = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}(x) - \square \xi_\mu(x),$$

なので

$$\square \xi_\mu(x) = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}(x), \quad (A)$$

となる ξ が常に存在すれば良いことが分かる. ここで, ある関数 $f_\mu(x)$ を用いて $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}(x) = f_\mu(x)$ と書くと

$$\square \xi_\mu(x) = f_\mu(x),$$

となる. この式の解は

$$\square G(x-y) = \delta^4(x-y),$$

を満たす Green 関数 $G(x)$ を用いて

$$\xi_\mu(x) = \int d^4 y G(x-y) f_\mu(y),$$

と書ける. よって式 (A) の解は常に存在し, Lorenz 条件は常に課しても良いことが分かる.

となる。つまり Newton ポテンシャルに相当する成分である h_{00} は時間に依らないことが分かる。しかし、伝播する重力波を扱っているなのでこの成分は関係なく、 $h_{00} = 0$ としてよい。以上をまとめると

$$\begin{aligned} h^{0\mu} &= 0 \\ h^i{}_i &= 0 \\ \partial^j h_{ij} &= 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

であり、これを TT (Transverse-Traceless) ゲージ²と呼ぶ [22]。以下では TT ゲージ下での計量を h_{ij}^{TT} と記す。

さて、線形化された Einstein 方程式 (2.17) は平面波解

$$h_{ij}^{\text{TT}}(x) = e_{ij}(\mathbf{k})e^{ikx}, \quad (2.25)$$

を持つ。ただし、 $kx = k^\mu x_\mu$ であり、 $k^\mu = (\omega_{\text{GW}}/c, \mathbf{k})$ 、 $\omega_{\text{GW}}/c = |\mathbf{k}|$ である。なお、 $e_{ij}(\mathbf{k})$ は偏極テンソル、 ω_{GW} は重力波の周波数である。このとき波数ベクトル \mathbf{k} で記述される単色平面波を考えると、式 (2.24) より h_{ij}^{TT} の 0 でない要素は重力波の進行方向 $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ と直交する。

ここで、重力波が z 軸 (x^3 軸) に進むとする (\mathbf{n} を z 軸に沿うように選ぶ) と、式 (2.24) と h_{ij}^{TT} の対称性より

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos[\omega_{\text{GW}}(t - z/c)], \quad (2.26)$$

となる。ただし、 h_+, h_\times は 2 つの独立な偏極モードを表す。さらに、 $h_+(t) = h_+ \cos[\omega_{\text{GW}}(t - z/c)]$ 、 $h_\times(t) = h_\times \cos[\omega_{\text{GW}}(t - z/c)]$ とすると

$$h_{ab}^{\text{TT}}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+(t) & h_\times(t) \\ h_\times(t) & -h_+(t) \end{pmatrix}_{ab} \quad (a, b = 1, 2), \quad (2.27)$$

と書ける。

今、 x 軸 (x^1 軸) 方向に沿って ϵ だけ離れた 2 つの自由質点を考える。このとき、式 (2.27) で表される z 軸方向の重力波の影響はこれらの質点の固有距離を考えることで分かる。質点がはじめ静止していたとすると、固有距離 Δl は

$$\Delta l \equiv \int |ds^2|^{1/2} = \int_0^\epsilon |g_{11}|^{1/2} dx^1 \simeq |g_{11}|^{1/2} \epsilon \simeq \left(1 + \frac{1}{2}h_{11}\right) \epsilon, \quad (2.28)$$

これより重力波は自由質点間の距離を変化させることが分かる。

次に、固有距離 $\epsilon^i = (\epsilon^x, \epsilon^y, \epsilon^z)$ だけ離れた 2 質点に z 軸方向に進む重力波が入射したとする。このとき式 (2.27) に従う重力波を仮定すると、この固有距離は

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_+(t) & h_\times(t) \\ h_\times(t) & -h_+(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon^x \\ \epsilon^y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}h_+(t) \begin{pmatrix} \epsilon^x \\ -\epsilon^y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}h_\times(t) \begin{pmatrix} \epsilon^y \\ \epsilon^x \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

と計算される。これより偏極モードについて、

- 1) h_+ モード (plus mode) は x 軸に伸ばすと共に、 y 軸方向には縮める
- 2) h_\times モード (cross mode) は h_+ を 45 度回転させたものである

ということが言える。これを表したものが図 2.1 であり、重力波が到来したとき、質点は潮汐的な運動をすることが分かる。

² 3 つ目の式 $\partial^j h_{ij} = 0$ から重力波は横波 (Transverse) であり、2 番目の式 $h^i{}_i = 0$ からトレースが 0 である (Traceless) ことが分かる。

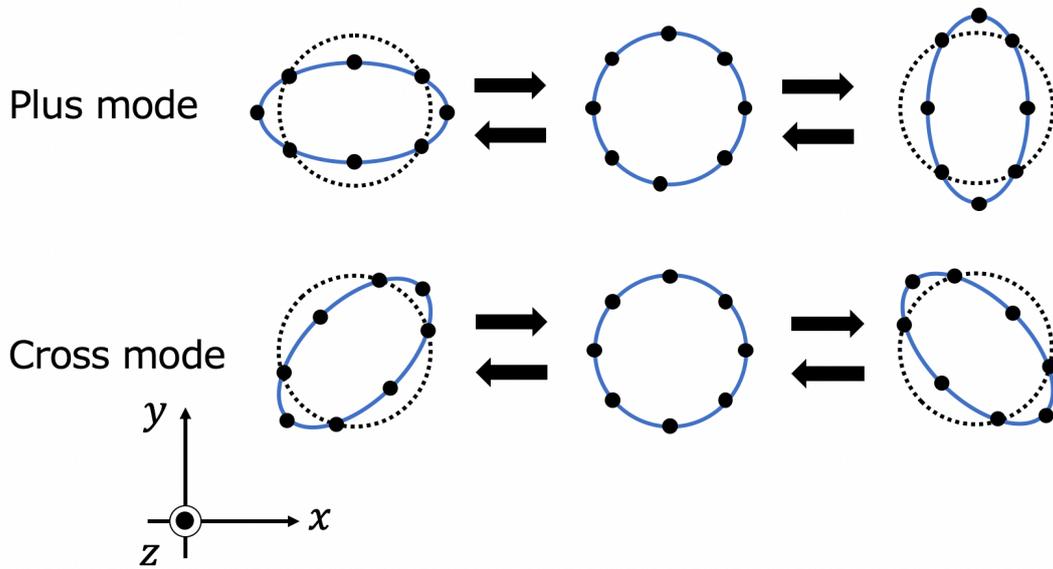


図 2.1 重力波の偏光モードの模式図. 重力波の入射によって, 質点間の固有距離が中央の初期状態から潮汐的に運動する様子を表している

2.1.3 重力波の輻射

電磁波の輻射から類推すると, 重力波は加速度をもった質量によって生まれることが分かる. しかし, 重力波では双極子放射が存在しない (質量は常に正であるから, 双極子モーメントが存在しない) ので, 4重極子モーメント (あるいはそれ以上の多重極) からの輻射を考えるという違いがある.

エネルギー運動量テンソルが存在する場合, (2.18) 式は

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

となる. また, Green 関数 $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ を

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(x_{\text{ret}}^0 - x'^0) \quad (2.31)$$

$$x_{\text{ret}}^0 \equiv ct_{\text{ret}}, \quad t_{\text{ret}} = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \quad (2.32)$$

と書くと式 (2.30) の解として

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x^0, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu} \left(x^0 - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}', \quad (2.33)$$

を得る. 真空でない ($T_{\mu\nu} \neq 0$) 範囲が十分小さく, 観測者が波源から十分離れているとすると式 (2.33) は多重極展開の最低次の項として,

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \ddot{Q}_{ij}(t'), \quad (2.34)$$

となる. ただし, $r \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, $t' \equiv t - r/c$ であり, Q_{ij} は四重極モーメント

$$Q_{ij}(t') = \int \rho(t', \mathbf{x}) \left(x'_i x'_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} x'^i x'^j \right) d\mathbf{x}', \quad (2.35)$$

である。

また, Larmor の公式から類推すると, この時の重力波の光度は

$$\mathcal{L}_{\text{gw}} = \frac{G}{5c^5} \langle (\ddot{Q}_{ij})^2 \rangle, \quad (2.36)$$

となる。ここで, 系の特徴的な質量 M , サイズ R , 時間スケール T , 速度 v を考えると四重極モーメントの時間 3 階微分は

$$\ddot{Q}_{ij} \sim \frac{MR^2}{T^3} \sim \frac{Mv^3}{R}, \quad (2.37)$$

と近似できる。これより光度 (2.36) のオーダーを計算すると

$$\mathcal{L}_{\text{GW}} \sim \frac{G}{c^5} \left(\frac{M}{R} \right)^2 v^6 \sim 3.6 \times 10^{59} \text{ [erg/s]} \left(\frac{r_{\text{sch}}}{R} \right)^2 \left(\frac{v}{c} \right)^6, \quad (2.38)$$

となる ($r_{\text{sch}} = 2GM/c^2$ は Schwarzschild 半径)。このエネルギー放射率は極めて小さく, 地球上に重力波源を作るのは難しいので天体からの放射に期待しているのである。ここで天体は普通, 自己重力に束縛されているので運動エネルギーと位置エネルギーの間に関係がある (virial 定理) と仮定でき,

$$Mv^2 \sim \frac{GM^2}{R}. \quad (2.39)$$

これを用いると式 (2.36) は

$$\mathcal{L}_{\text{GW}} \sim 3.6 \times 10^{59} \text{ [erg/s]} \left(\frac{r_{\text{sch}}}{R} \right)^5, \quad (2.40)$$

となる。これより, コンパクト天体 (ブラックホールや中性子星など) が重力波源の候補になることが分かる。

さらに, 輻射された重力波の振幅を考えるために式 (2.34) に対して

$$h \sim \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (MR^2) \sim \frac{1}{r} \frac{2GMv^2}{c^4} \sim \frac{r_{\text{sch}}}{r} \left(\frac{v}{c} \right)^2, \quad (2.41)$$

という近似を行う。また, 重力波によるエネルギー放射効率を ϵ として

$$\epsilon \sim \left(\frac{r_{\text{sch}}}{R} \right), \quad (2.42)$$

とパラメタ化すると式 (2.41) は

$$h \sim \epsilon^{2/7} \frac{r_{\text{sch}}}{2r} \sim 1.5 \times 10^{-18} \left(\frac{\epsilon}{0.1} \right)^{2/7} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{r}{10 \text{ [kpc]}} \right)^{-1}, \quad (2.43)$$

となる (天体までの距離 r は銀河中心程度にスケールリングした)。エネルギー効率は 10% 程度と見積もったが, それでも重力波の振幅が小さいことが分かる。

2.1.4 主な重力波源

測定できるほど大きな振幅を持つ重力波を人工的に生成して観測するのは難しい。例えば, $a = 10 \text{ m}$ の棒の両端に $M = 10^3 \text{ kg}$ の物体を取り付けて 1 秒間に 10 回転 ($f = \frac{\omega}{2\pi} = 10 \text{ Hz}$) させるとすると, 式 (2.41) より

$$h \sim \frac{2GMa^2(2\pi f)^2}{rc^4} \sim \frac{6.52}{r} \times 10^{-43} \left(\frac{M}{10^3 \text{ kg}} \right) \left(\frac{a}{10 \text{ m}} \right)^2 \left(\frac{f}{10 \text{ Hz}} \right)^2,$$

となる。一方で重力波望遠鏡の感度は $10^{-20} \sim 10^{-22}$ であるから, 実験室で重力波を発生させて観測するのは不可能である。

しかし、宇宙には重い星が加速度運動するような天体現象がいくつか存在する。コンパクト連星合体やパルサーの自転、超新星爆発や初期宇宙における膨脹などがその例として挙げられるが、これらによる重力波を用いて新たな天体現象や宇宙の描像の獲得を目指す重力波天文学の発展に期待がかかっている。以下ではこのような重力波源について簡単に記す。

2.1.4.1 コンパクト連星合体（チャープ波）

ブラックホール連星あるいは中性子星連星は重力波を放出する際、徐々にエネルギーを失って軌道半径が小さくなっていき、最終的に合体する。この時、軌道半径の減少に伴って周波数と振幅が増大するチャープ波形が観測される。また、その波形と理論的な予測との比較により連星の質量・スピンといった情報を得ることができ、その合体波形から中性子星の状態方程式に制限を設けたり、一般相対性理論を検証したりと幅広い物理への応用が可能である。

質量 m_1, m_2 の星が合体するまでの時間を $t_{\text{coal}} - t$ とすると放出される重力波の周波数はチャープ質量

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}, \quad (2.44)$$

を用いて

$$f = \frac{5^{3/8}}{8\pi} \left(\frac{G\mathcal{M}}{c^3} \right)^{-5/8} (t_{\text{coal}} - t)^{-3/8} \sim 134 \text{ [Hz]} \left(\frac{1.21 M_{\odot}}{\mathcal{M}} \right)^{5/8} \left(\frac{1 \text{ [s]}}{t_{\text{coal}} - t} \right), \quad (2.45)$$

と書ける。地上のレーザー干渉計型重力波望遠鏡は 100 Hz 付近で感度が良いように設計されており、特定領域の質量を持つコンパクト連星の合体は最も観測しやすい波源の 1 つである。実際、人類が初めて直接観測した重力波は、ブラックホール連星の合体によるものであり [6]、その後もコンパクト連星合体による重力波イベントは数多く観測されている。

2.1.4.2 パルサー（連続波）

パルサーとは回転する中性子星のことを指す。式 (2.36) から分かるように、回転軸対称な質量分布の変化では重力波は放出されないが、パルサーが回転軸に対して完全に対称でない場合はその回転周波数で連続重力波が放射される。

この非対称性はパルサー生成時の残留非対称性やその後の質量降着などによると考えられる。また、非対称性の大きさは中性子星の状態方程式に依るが、その状態方程式についてはよく分かっていない。よって、パルサーからの重力波を観測することによって、非対称性のメカニズムおよび中性子星の状態方程式を解明することが期待されている。また、これまでの観測により、中性子星の非軸対称性を表す楕円度 ϵ に上限値をつけることができている（例えば Crab パルサーに対しては $\epsilon \leq 10^{-4}$ ） [23]。

2.1.4.3 超新星爆発（バースト波）

超新星爆発とは、非常に重い星が一生の終わりに重力崩壊や高エネルギー反応によって引き起こす爆発のことであり、激しい質量の移動が起こるため、非対称性が伴う爆発の場合は重力波源になりえ、バースト的な重力波が予想されている [24]。その重力波により、電磁波では観測できない超新星内部の情報を得て、爆発のメカニズムを解明することが期待されている。その実現には超新星爆発の信号と重力波望遠鏡における突発性ノイズを区別するために、複数台の検出器で観測を行うことが求められる。

2.1.4.4 宇宙背景重力波

電磁波を用いて初期宇宙を直接観測することはできない。なぜなら、宇宙誕生後の 38 万年間は電子と陽子が電離したプラズマ状態であるため、電磁波は真っ直ぐに飛べないからである。それゆえ初期宇宙を直接観測する唯一の手段が重力波となる。もし初期宇宙の背景重力波を検出することができれば宇宙論を大きく進歩させるものである。

例えば宇宙の平坦性や地平線問題を解決するために唱えられているインフレーション理論では、時空の量子揺らぎにより重力波が発生すると言われている。インフレーションによって引き伸ばされたこの重力波は現在もあらゆる場所を伝播しており、背景重力波と呼ばれている。この重力波を検出することによって、インフレーション理論の検証やその後ビッグバンが起こった時期の特定など、宇宙論における様々な問題が解決できると見込まれている。

2.1.5 重力波観測の貢献

重力波は非常に強い透過力を持ち、減衰しないという点で従来の観測手段とは大きく異なる。ここではそのような重力波の観測の利用例について述べる。

2.1.5.1 マルチメッセンジャー天文学

これまでの天文学は電磁波による観測にニュートリノや宇宙線を用いた観測が加わることで進められてきた。そして、重力波がこれまでとはまったく異なる観測手段となることで、新たな発見・進歩が見込まれる。さらに、電磁波やニュートリノ、および重力波の観測を同時に行うことで単独では知り得ない情報（例えばショートガンマ線バーストの起源の確定、r 過程元素合成の詳細、超新星爆発のメカニズムなど）を得られる [25]。これがマルチメッセンジャー天文学であり、その実現のために各研究機関で協力体制がとられている。

マルチメッセンジャー天文学においては重力波信号を検出した際、電磁波観測を行う機関に連絡し、同じ方向の観測を行なってもらう。反対に、電磁波観測の結果を受け、同時刻の重力波データを解析するということも考えられる。よって、重力波検出には波源方向の特定精度の向上、突発性雑音による誤検出の低減などが求められる。

2.1.5.2 重力理論

重力波観測の結果を用いた一般相対論の検証は既に始まっている。例えば一般相対論で予想される重力波形状と観測結果のずれがどのくらいかということや、一般相対論では重力波は光速で伝播するので重力子の質量は 0 とされるが、実際の観測から重力子に質量があると言えるかということなどが検証されており、未だ破綻は見つかっていない [26]。今後は大質量ブラックホールからの重力波を高感度で観測することで、その準固有振動成分をより詳細に解析し、一般相対論の検証に繋げることなどが見込まれる。例えば一般相対論を仮定すると、ブラックホールでは唯一性定理（ブラックホールが質量・電荷・スピンだけで記述できるとするもの）が成り立つ。すなわち、準固有振動における周波数や振動パターンが質量・電荷・スピンのみで記述できる。よって準固有振動からの重力波を詳細に観測することにより、一般相対論の検証が可能だと考えられる。

他にも自然界にある 4 つの力を統一するため、一般相対論と量子論を複合した量子重力理論の完成が求められているが、超弦理論はそのような理論として有力である。これは 4 つの力のうち重力だけが弱く統一的に扱いきれないことを、重力のみが余剰次元³にしみ出すとして説明する。これを検証する手段として重力

³ 超弦理論では時空・空間の 4 次元の他に、余剰次元（7 次元）があるとし、11 次元の世界の中の膜の中に我々が存在すると考える。

波が挙げられている。例えば遠くの天体から到来する重力波の一部が余剰次元にしみ出した場合、観測される重力波の強度が小さくなるので、それにより余剰次元の存在を証明するのである。このような量子重力理論を用いた物理法則の統一により、宇宙の誕生および進化が説明できると考えられる。

2.2 レーザー干渉計型重力波検出器

重力波検出器の開発は 1960 年代から行われてきた。初めは重力波によって金属製の共振体の共振振動が励起されることを利用した、共振型といわれる装置での重力波の検出を目指していたが、この装置で検出できるのは共振体の共振周波数の重力波に限られてしまう。そこで、現在ではより広い観測帯域を持つレーザー干渉計型の検出器が主流になっている。

このレーザー干渉計型重力波検出器は広い周波数帯域で高感度を達成するが、重力波信号は微小であり、さまざまな雑音が生じて感度を制限する。この節ではレーザー干渉計型重力波検出器の基本原理や問題となる雑音、実際に観測を行っている検出器について述べる。

2.2.1 Michelson 干渉計

2.2.1.1 原理

レーザー干渉計型重力波検出器は図 2.2 のような Michelson 干渉計を基本構成としている。図の左側から入射したレーザー光が光のパワーを半分づつに分ける Beam Splitter (BS) によって分けられ、直交した腕を往復した後 BS で再結合し、干渉する。重力波検出器の場合は BS で干渉した光が全て入射側に戻り、Signal Port に光が漏れないように腕の長さが制御されている (Dark Fringe Control)。

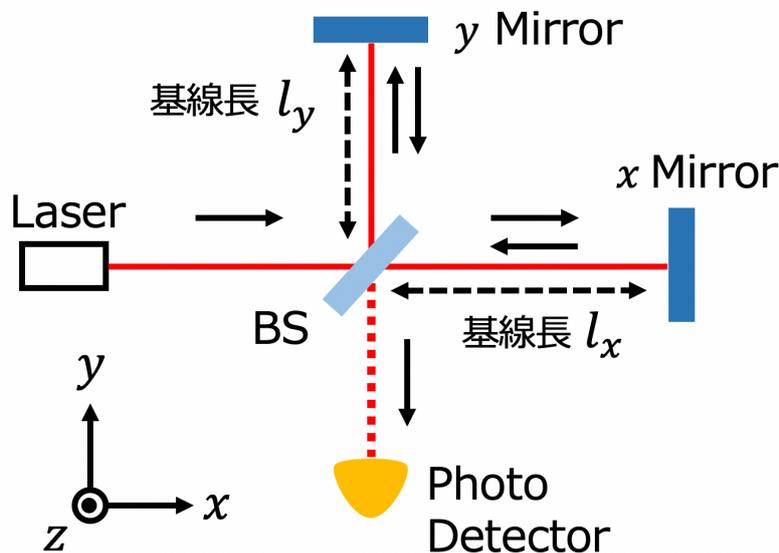


図 2.2 Michelson 干渉計（レーザー干渉計型重力波検出器の基本構成）の概念図

この干渉計に重力波が到来すると自由質点間（観測周波数帯域において自由質点となるよう、鏡は振り子型の懸架装置に吊るされている）の固有距離（BS と x, y Mirror 間の距離）が変化し、この光路長変化によって BS に戻ってくる光に位相変調が加わる。これはキャリアである入射レーザー光に対して重力波の周波数に応じた Sideband（側波帯）が生成されるということを意味している。重力波信号を運ぶこの

Sideband を信号 Sideband と呼ぶ。信号 Sideband は二つの腕で逆位相となるので、BS での干渉条件はレーザー光とは逆になる。つまり、光が漏れていなかった Signal Port に信号 Sideband が抜けてくる。これを Photo Detector (PD) で検出することで、重力波の到来が分かる。この様子を数式で示すと以下のようになる。

レーザーから出た光を $E_0(t) = Ae^{i\Omega t}$ とする (角周波数 Ω はレーザー光の波長 λ を用いて $\Omega = 2\pi c/\lambda$)。BS で分かれた光は x Mirror および y Mirror で反射して再び BS に戻ってくる。ここで y Mirror で反射して PD に入る光が x Mirror による反射光に対して $\delta\phi$ だけ位相がずれるとすると PD で検出される光は

$$E_{\text{PD}}(t) = E_x e^{i\Omega t} - E_y e^{i(\Omega t + \delta\phi)}, \quad (2.46)$$

と書ける (E_x, E_y はそれぞれ x, y Mirror から返ってくる光の振幅)。これより PD で受け取る光の強度は

$$P = |E_{\text{PD}}(t)|^2 = \frac{P_{\text{max}} + P_{\text{min}}}{2} + \frac{P_{\text{max}} - P_{\text{min}}}{2} \cos(\delta\phi), \quad (2.47)$$

となる。ただし、

$$P_{\text{max}} = \frac{(E_x + E_y)^2}{2}, \quad P_{\text{min}} = \frac{(E_x - E_y)^2}{2}, \quad (2.48)$$

である。よって位相差 $\delta\phi$ によって強度が余弦関数的に変化することが分かる。また、 P_{max} と P_{min} を用いて

$$C \equiv \frac{P_{\text{max}} - P_{\text{min}}}{P_{\text{max}} + P_{\text{min}}}, \quad (2.49)$$

が定義される。これは干渉計のコントラストと呼ばれ、完全に干渉状態にあるとき $C = 1$ 、全く干渉していないとき $C = 0$ となる。つまり、干渉縞の明瞭度を表す指標である。

2.2.1.2 重力波に対する応答

さて、重力波 h_+ が Michelson 干渉計へ z 方向に入射したときの応答を考える。このとき

$$ds^2 = -cdt^2 + (1 + h_+)dx^2 + (1 - h_+)dy^2 + dz^2, \quad (2.50)$$

と書ける。 x, y Mirror は自由質点であるから座標は変化せず、光は $ds^2 = 0$ の世界線を進むので x 軸上において

$$dx = \pm \frac{cdt}{\sqrt{1 + h_+}} \sim \pm \left(1 - \frac{1}{2}h_+\right) cdt, \quad (2.51)$$

である。これを BS と x Mirror の間を往復する経路 (所要時間 τ_x) で積分すると

$$\frac{2l_x}{c} = \int_{t-\tau_x}^t \left(1 - \frac{1}{2}h_+\right) dt', \quad (2.52)$$

となる。ここで重力波の振幅は極めて小さい ($h \ll 1$) なので積分範囲の τ_x は $2l_x/c$ とみなせて

$$\tau_x = \frac{2l_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-2l_x/c}^t h_+ dt', \quad (2.53)$$

が得られる。これより x 軸上で 1 往復する際の位相変化を求めると

$$\phi_x = \Omega\tau_x = \frac{2l_x\Omega}{c} + \frac{\Omega}{2} \int_{t-2l_x/c}^t h_+ dt'. \quad (2.54)$$

y 軸上の場合も符号が異なること以外は同様に計算できるので、 $l_x \sim l_y \sim l$ の場合の位相差は

$$\delta\phi = \frac{2(l_x - l_y)\Omega}{c} + \Omega \int_{t-2l_x/c}^t h_+ dt'. \quad (2.55)$$

この式のうち、第2項が重力波による位相変化 $\delta\phi_{GW}$ であり、これを読み取ることで重力波の検出が可能になる。ここで $h_+(t)$ の Fourier 変換

$$h_+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_+(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.56)$$

を用いると重力波による位相変化は

$$\delta\phi_{GW} = \int_{-\infty}^{\infty} H_{MI} h_+(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.57)$$

ただし、

$$H_{MI} = \frac{2\Omega}{c} \sin\left(\frac{l\omega}{c}\right) e^{-\frac{i\omega l}{c}}, \quad (2.58)$$

である。これが Michelson 干渉計の重力波に対する周波数応答になる。この式より $|H_{MI}|$ が最大になるのは

$$\frac{l\omega}{c} = \frac{\pi}{2}, \quad (2.59)$$

のときであることが分かるが、これは重力波の位相が1往復でちょうど反転する場合に Michelson 干渉計の感度が最も良くなることを表している。さらに、100 Hz の重力波を観測する場合はおよそ 750 km の腕の長さを持つ干渉計が必要であることも分かる。しかし、そのような長さの干渉計を地上に建設することは不可能であるため、光を何度も往復させて実行的な光路長を長くする Fabry-Pérot 型の干渉計が用いられる。

2.2.2 Fabry-Pérot Michelson 干渉計

2.2.2.1 Fabry-Pérot 共振器

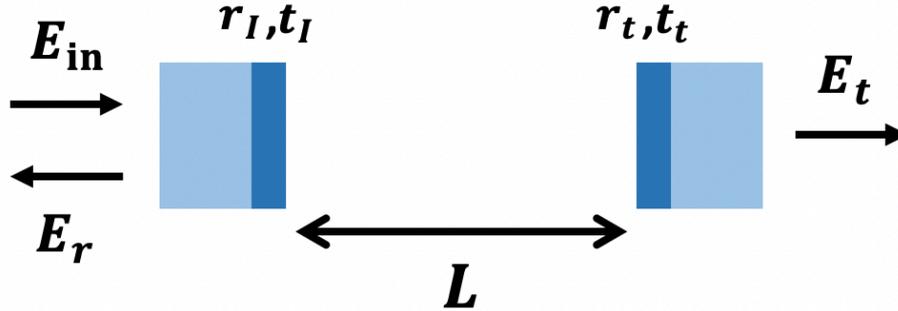


図 2.3 Fabry-Pérot 共振器

Fabry-Pérot Michelson 干渉計の原理や重力波に対する応答を記す前に、Fabry-Pérot 共振器について概要を記す。

図 2.3 のような長さ L の Fabry-Pérot 共振器を考え、ITM の振幅反射率および透過率を r_I, t_I とし、ETM に対しても同様に r_E, t_E とする。このとき、共振器の反射光電場は

$$E_r = -r_I E_{in} + \sum_{n=1}^{\infty} t_I^2 r_I^{n-1} r_E^n e^{i \times 2nkL} E_{in} = \left(-r_I + \frac{t_I^2 r_E e^{2ikL}}{1 - r_I r_E e^{2ikL}} \right) E_{in}, \quad (2.60)$$

$$E_t = \sum_{n=1}^{\infty} t_I t_E r_I^{n-1} r_E^{n-1} e^{i \times (2n-1)kL} E_{in} = \frac{t_I t_E e^{2ikL}}{1 - r_I r_E e^{2ikL}} E_{in}, \quad (2.61)$$

となる。よって共振器の振幅反射率・透過率 $(r_{\text{cav}}, t_{\text{cav}})$ と強度反射率・透過率 $(R_{\text{cav}}, T_{\text{cav}})$ は

$$r_{\text{cav}} = \frac{E_r}{E_{\text{in}}} = -r_I + \frac{t_I^2 r_E e^{2ikL}}{1 - r_I r_E e^{2ikL}} \quad (2.62)$$

$$t_{\text{cav}} = \frac{E_t}{E_{\text{in}}} = \frac{t_I t_E e^{2ikL}}{1 - r_I r_E e^{2ikL}} \quad (2.63)$$

$$R_{\text{cav}} = |r_{\text{cav}}|^2 = \frac{[r_I - (r_I^2 + t_I^2)r_E]^2 + 4r_I r_E (r_I^2 + t_I^2) \sin^2 kL}{(1 - r_I r_E)^2 + 4r_I r_E \sin^2 kL} \quad (2.64)$$

$$T_{\text{cav}} = |t_{\text{cav}}|^2 = \frac{(t_I t_E)^2}{(1 - r_I r_E)^2 + 4r_I r_E \sin^2 kL}, \quad (2.65)$$

であり、さらに入射光強度に対する共振器内の光強度は式 (2.65) の分子において t_E^2 で割って、

$$T_{\text{cav 内}} = \frac{t_I^2}{(1 - r_I r_E)^2 + 4r_I r_E \sin^2 kL}, \quad (2.66)$$

と表される。なお、鏡の反射・透過による光学的な損失がない場合は $r_I^2 + t_I^2 = 1$ であり、 $R_{\text{cav}} + T_{\text{cav}} = 1$ となる。

式 (2.65) において $kL = n\pi$ ($n \in \mathbf{N}$) とすると強度透過率は最大値 $T_{\text{cav}}^{\text{max}} = \frac{(t_I t_E)^2}{(1 - r_I r_E)^2}$ をとり、この状態を共振状態と呼ぶ。一方、 $kL = (n + \frac{\pi}{2})$ のとき、強度透過率は最小値 $T_{\text{cav}}^{\text{min}} = \frac{(t_I t_E)^2}{(1 + r_I r_E)^2}$ となり、反共振状態と呼ばれる。

ここで、強度透過率をレーザー周波数の関数とみなすと、隣り合う共振状態の周波数差は式 (2.65) より

$$\nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{2L}, \quad (2.67)$$

と表され、フリースペクトラルレンジ (Free Spectral Range : FSR) と呼ばれる。また、Fabry-Pérot 共振器を構成する鏡の反射率が 1 に近い時は $T_{\text{cav}(\nu)}$ は ν_{FSR} 間隔で鋭いピークを持つ (図 2.4)。このピークの半値全幅を $\nu_{\text{FWHM}}(r_I, r_E)$ とすると、

$$T_{\text{cav}}(\nu_{\text{FWHM}}) = \frac{1}{2} T_{\text{cav}}^{\text{max}}, \quad (2.68)$$

であり、

$$\nu_{\text{FWHM}}(r_I, r_E) = \frac{c(1 - r_I r_E)}{2\pi L \sqrt{r_I r_E}}, \quad (2.69)$$

と書ける。ここで ν_{FSR} と ν_{FWHM} の比をとると、

$$\mathcal{F}(r_I, r_E) = \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\text{FWHM}} = \frac{\pi \sqrt{r_I r_E}}{1 - r_I r_E}, \quad (2.70)$$

となる。この \mathcal{F} はフィネスと呼ばれ、Fabry-Pérot 共振器の共振の鋭さを表している。

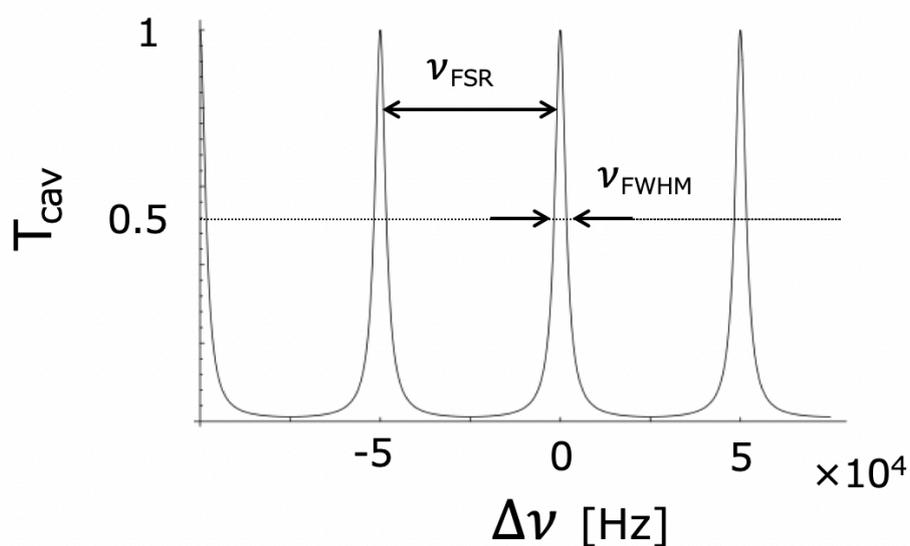


図 2.4 Fabry-Pérot 共振器の強度透過率. 横軸はある共振周波数からのずれである. また, 縦軸は適当な値に規格化してある.

2.2.2.2 原理

Fabry-Pérot Michelson 干渉計 (Fabry-Pérot Michelson Interferometer : FPMI) は図 2.5 に示したように, Michelson 干渉計の BS と各鏡の間にもう 1 つずつ鏡を入れた構成になっている. 各腕の 2 個の鏡で構成された共振器が Fabry-Pérot 共振器であり, 向かい合う鏡間の距離を光の波長の半整数倍に調整して光を共振させている.

FPMI では BS から入射した光は, 一部の光が透過するような薄膜コーティングが施された Input Test Mass (ITM) を透過し, ほぼすべての光が反射するような薄膜コーティングがなされた End Test Mass (ETM) で反射し, 再び ITM に戻る. また, 鏡の共振器側は反射コーティングがなされているため, ETM から ITM へ戻ってきた光は再度 ETM へ反射される. このコーティングの反射率を調整して共振器内の光が少しずつ BS 側に滲み出ていくようにすることで, 光はある平均折り返し回数 n で共振器の外へと出ていくとみなせるようになる.

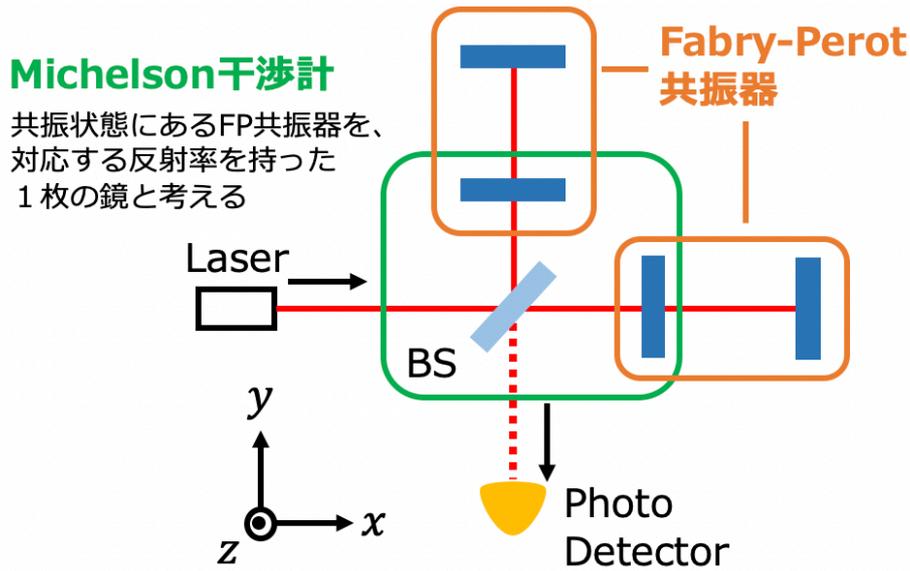


図 2.5 Fabry-Pérot Michelson 干渉計の概念図

2.2.2.3 重力波に対する応答

先ほどと同様に、重力波 h_+ が FPMI へ z 方向に入射したときの応答を考える。光が τ_n の時間をかけて共振器を n 回往復したとすると

$$\tau_n = \frac{2L}{c}n + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_+(\omega) \frac{1 - e^{-2inL\omega/c}}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.71)$$

となる。ここで、ITM の反射率および透過率を r_I, t_I 、ETM の反射率を r_E とし、光が共振器長 L だけ進んだときの位相変化を Δ とすると Fabry-Pérot 共振器内で反射される光の振幅は

$$E_r = E_0 \left(r_I - t_I^2 r_E \sum_{n=0}^{\infty} r_I^n r_E^n \right) e^{-2in\Delta}, \quad (2.72)$$

と書ける。共振しているときは $\Delta = n\pi$ なので h の 1 次まで計算すると

$$E_r \sim E_0 \frac{r_I - r_E(t_I^2 + r_I^2)}{1 - r_I r_E} \left(1 - i \int_{-\infty}^{\infty} H_{\text{FP}}(\omega) h_+(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right), \quad (2.73)$$

となる。ただし、

$$H_{\text{FP}} = \frac{2\alpha\Omega}{\omega} \frac{\sin(\omega L/c)}{1 - r_I r_E e^{-2i\omega L/c}} e^{-i\omega L/c}, \quad (2.74)$$

$$\alpha = \frac{t_I^2 r_E}{r_I - (r_I^2 + t_I^2) r_E}, \quad (2.75)$$

である。この H_{FP} が FPMI の周波数応答を示し、

$$|H_{\text{FP}}| = \frac{2\alpha\Omega}{\omega(1 - r_I r_E)} \frac{|\sin(\omega L/c)|}{\sqrt{1 + F \sin^2(\omega L/c)}}, \quad (2.76)$$

となる。ここで F はフィネスを用いて

$$F = \frac{4r_I r_E}{(1 - r_I r_E)^2} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi}, \quad (2.77)$$

と表される値である。

また、光が共振器内を動く間の重力波の時間変化が十分小さい、すなわち $\omega L/c \ll 1$ のときは

$$\begin{aligned}
|H_{\text{FP}}| &\simeq \frac{2\alpha\Omega}{\omega(1-r_I r_E)} \frac{\omega L/c}{\sqrt{1+F(\omega L/c)^2}} \\
&= \frac{2\alpha\Omega L}{c(1-r_I r_E)} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{FL}}{c}\omega\right)^2}}, \\
&= \frac{2\alpha\Omega L}{c(1-r_I r_E)} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}
\end{aligned} \tag{2.78}$$

となり、キャビティポール $2\pi\omega_c$ の 1 次のローパス特性を保つことが分かる。ここで、

$$\omega_c = \frac{c}{\sqrt{FL}} = \frac{c(1-r_I r_E)}{2L\sqrt{r_I r_E}}, \tag{2.79}$$

であり、

$$\nu_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c(1-r_I r_E)}{4\pi L\sqrt{r_I r_E}} = \frac{1}{2}\nu_{\text{FWHM}}, \tag{2.80}$$

は cut-off 周波数である。また、キャビティポールの逆数

$$\tau = \frac{1}{\omega_c} = \frac{2L\sqrt{r_I r_E}}{c(1-r_I r_E)}, \tag{2.81}$$

は光が共振器内に滞在する平均時間 (storage time) を表す。この平均滞在時間は式 (2.70) を用いて

$$\tau = \frac{2L}{\pi c} \mathcal{F}, \tag{2.82}$$

と表せる。一方、Fabry-Pérot 共振器における折り返し数を N_{FP} とすると

$$\tau = N_{\text{FP}} \frac{2L}{c}, \tag{2.83}$$

なので、式 (2.82) と合わせて

$$N_{\text{FP}} = \frac{\mathcal{F}}{\pi}, \tag{2.84}$$

となり、折り返し数をフィネスで表すことができる。

最後に Michelson 干渉計の場合と比較する。重力波に対する周波数応答の比を取ると、式 (2.58) と式 (2.78) より、

$$\frac{|H_{\text{FP}}|}{|H_{\text{MI}}|} = \frac{2\alpha}{1-r_I r_E} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}, \tag{2.85}$$

となる。この式において $r_E \rightarrow 1, \omega \ll \omega_c$ とすると

$$\frac{|H_{\text{FP}}|}{|H_{\text{MI}}|} \rightarrow \frac{4}{T_I}, \tag{2.86}$$

であり、この極限で FPMI は実効的にアーム長が $4/T_I$ の Michelson 干渉計とみなすことができる。また、両者の周波数応答を図 2.6 に示した。低周波では FPMI の腕共振器の影響により、Michelson 干渉計よりも応答が増幅されるが、キャビティポール (cut-off 周波数) より高周波では信号が減衰されてしまう。

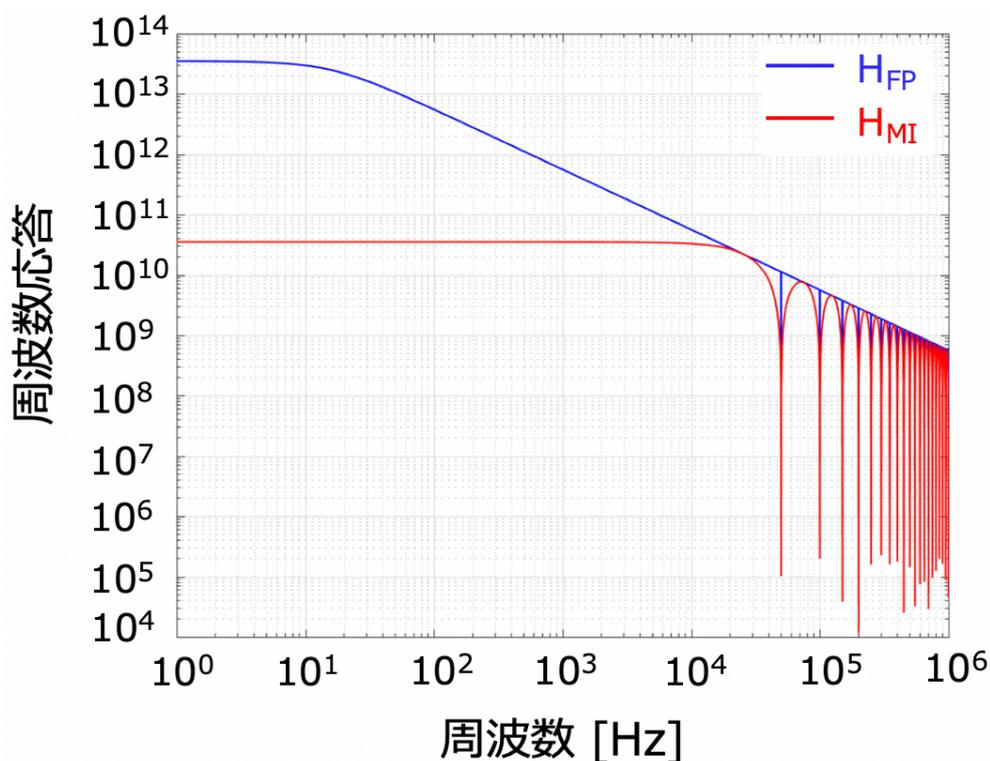


図 2.6 Michelson 干渉計 (3 km) と FPMI (腕共振器の長さ 3 km) の周波数応答. 低周波において, FPMI では腕共振器の影響で, Michelson 干渉計よりも応答が増幅される. しかし, キャビティポール (cut-off 周波数) より高周波では信号が減衰されてしまう.

2.2.3 DRFPMI

FPMI にパワーリサイクリングと RSE を導入した干渉計を Dual-Recycled Fabry-Pérot Michelson interferometer (DRFPMI) と呼び, 現在はこの形がレーザー干渉計型重力波検出器の主流なものとなっている. なお図 2.7 に示したように, DRFPMI には全部で 5 つの長さ自由度がある.

まず, DARM と呼ばれるのは Fabry-Pérot 共振器の差動変動であり, 重力波信号はこの自由度の変動として現れる. 一方 CARM は Fabry-Pérot 共振器長の同相成分である. CARM の信号は共振器長変動の同相成分であり, レーザーの周波数揺らぎを反映するようになっているので, この自由度を用いてレーザー周波数の安定化を行う. また, PRCL および SRCL は Power Recycling Cavity (PRC), Signal Recycling Cavity (SRC) の長さであり, それぞれ 2 枚の ITM と Power Recycling Mirror (PRM), Signal Recycling Mirror (SRM) の距離の平均で表される. 最後に, MICH とは Michelson 干渉計部分の自由度である. 以下ではパワーリサイクリングと RSE について簡単に記す.

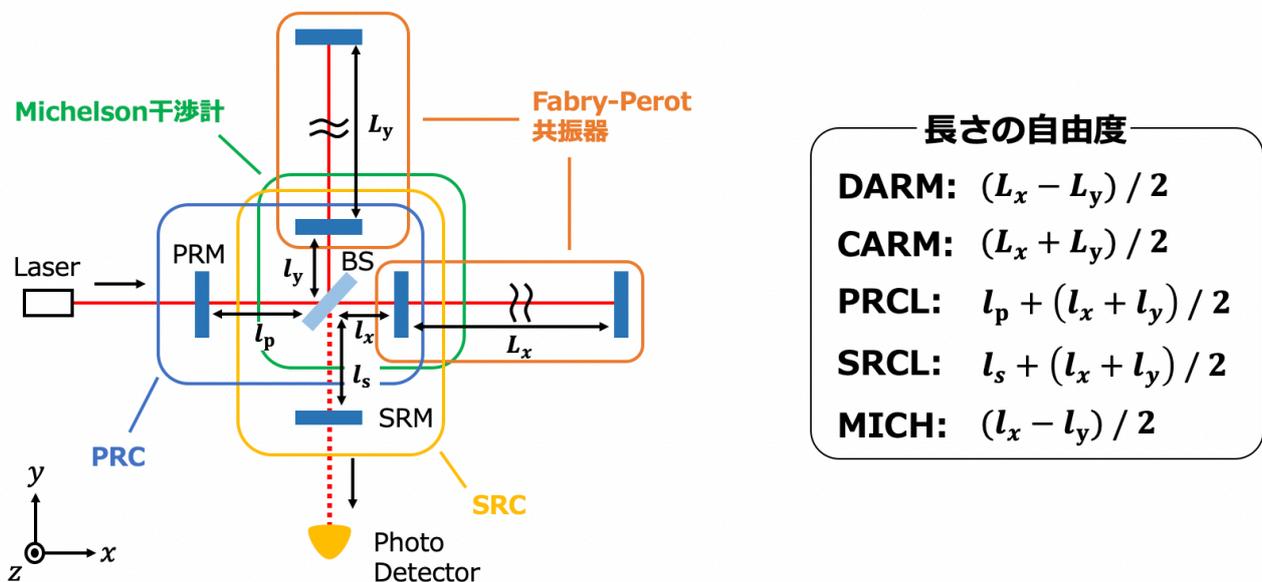


図 2.7 DRFPMI 干渉計の概念図および長さの自由度

2.2.3.1 パワーリサイクリング

重力波検出器では、散射雑音の最小化のため、干渉計の Signal Port から光が漏れないような制御をしている。そのため、レーザーパワーのほとんどが入射側へと戻っていく。一方、重力波信号を大きくするためには重力波と相互作用する腕共振器内のレーザーパワーを上げる必要がある。そこで、戻っていくレーザーを FPMI に打ち返す鏡を入射側に置き、実効的なレーザーパワーを増大させている。これにより、散射雑音レベルを改善することができる [27]。

この手法をパワーリサイクリングと呼び、打ち返しを行う鏡を Power Recycling Mirror (PRM) と呼ぶ (図 2.7)。このとき、入射側から見た FPMI は全体として 1 つの鏡とみなすことができる (レーザーを PRM 側に反射している)。ここで、光共振器において、二つの鏡の反射率が等しい場合、入射したレーザーパワーは内部で熱に変わるか、あるいは透過する。しかし、重力波検出器では ETM の反射率が極めて高いので、ほとんどの光は熱に変換されるまでの間、干渉計内にとどまる。よって、FPMI を 1 つの鏡とみなしたときの反射率と PRM の反射率を一致させることで、入射レーザーパワーを最大効率で利用できるのである。

また、2 つの ITM と PRM で構成される共振器は Power Recycling Cavity (PRC) と呼ばれる。この PRC は PRM と腕共振器の複合鏡からなる共振器とみなせる。そこで、式 (2.66) において $r_I \rightarrow r_P$, $t_I \rightarrow t_P$, $r_E \rightarrow r_{Acav}$, $L \rightarrow l_p$ と置き換えると、入射光電場 E_{in} に対する、BS での光電場 E_{BS} の強度増幅率 G_P が得られる。なお、 r_p , t_p は PRM の振幅反射率および振幅透過率、 r_{Acav} は腕共振器の振幅反射率である。パワーリサイクリングでは、光電場が PRC 長 l_p に対して共振状態となるようにするので

$$G_P = \frac{t_P^2}{(1 - r_P r_{Acav})^2}, \quad (2.87)$$

となる。ここで、共振器の振幅反射率を表した式 (2.62) において、共振状態を考えると PRC に対して

$$r_{PRC} = \frac{-r_P + (r_P^2 + t_P^2) r_{Acav}}{1 - r_P r_{Acav}}, \quad (2.88)$$

である。光学損失がないとすると、 $r_P = r_{Acav}$ のときに $r_{PRC} = 0$ となるのでこれが最適条件であり、このとき G_P は

$$G_P = \frac{1}{t_p^2} = \frac{1}{T_P}, \quad (2.89)$$

となり、PRM の強度透過率に反比例する。なお、 G_P はパワーリサイクルゲインと呼ばれ、KAGRA ではこの値は 10 となっている。

2.2.3.2 Resonant Sideband Extraction

Fabry-Pérot 共振器のフィネスを上げることで光子の折り返し数が増え、重力波信号が増幅されるが、1 つの光子が共振器内に留まっている間に重力波の符号が反転してしまう。これにより光子に蓄積された位相変化がキャンセルされ、高周波で重力波信号に対する感度が落ちてしまう。そこで Resonant Sideband Extraction (RSE) と呼ばれる手法を用いる [28]。

RSE では Signal Recycling Mirror (SRM) が Signal Port 側に置かれる (図 2.7)。この鏡と Fabry-Pérot 共振器の ITM2 枚で Signal Recycling Cavity (SRC) を構成しており、重力波が入射したときに生成される信号 Sideband が SRC に共振するように SRC の長さを制御している。このとき、信号 Sideband にとっての SRC の反射率 (Fabry-Pérot 共振器内から見た ITM の反射率) は ITM 単体よりも低くなる。よって信号 Sideband に対する Fabry-Pérot 共振器の実効的なフィネスが下がる、すなわち信号 Sideband だけ Fabry-Pérot 共振器内の滞在時間が減り、高周波での信号減衰の程度が小さくなる。なお、レーザー光にとっては Fabry-Pérot 共振器のフィネスは高いままなので、重力波信号の増幅率は変わらない。

また、SRC はキャリアに対して共振もしくは反共振に制御するかの違いで、それぞれ Broad Resonant Sideband Extraction (BRSE), Broadband Signal Recycling (BSR) と呼ばれる (図 2.8)。

BRSE では SRM と ITM の複合鏡の振幅反射率が小さくなり、腕共振器でのキャリアの平均往復回数が小さくなるため、低周波において信号増幅率が低下する。一方、高周波では信号が相殺する前に腕共振器から抜き出すことで、信号を増幅している (signal extraction)。BSR ではその全く逆で、低周波では信号増幅率が高く (signal recycling)、高周波では信号相殺の影響が大きくなる。これをまとめると、BRSE と BSR の周波数応答は図 2.9 のようになる。

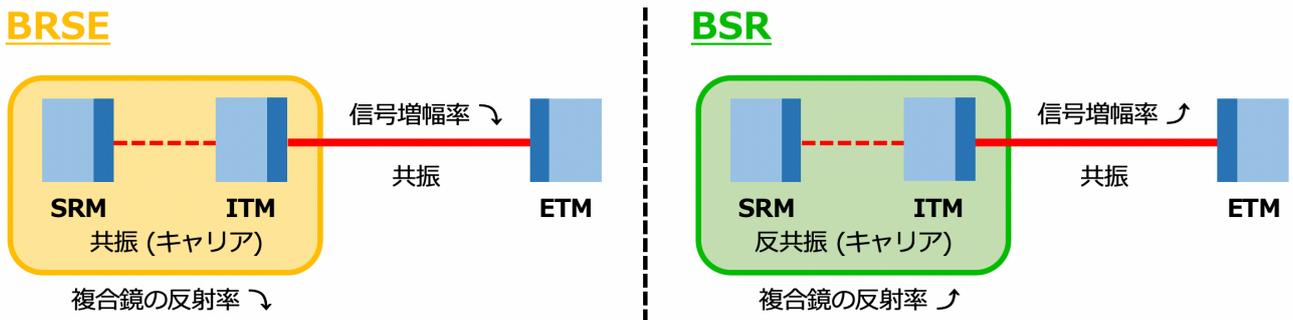


図 2.8 SRC のモード。BRSE では SRM と ITM の複合鏡の振幅反射率が小さくなり、腕共振器でのキャリアの平均往復回数が小さくなるため、低周波において信号増幅率が低下する。一方で、高周波では信号が増幅される。BSR ではその逆となる。

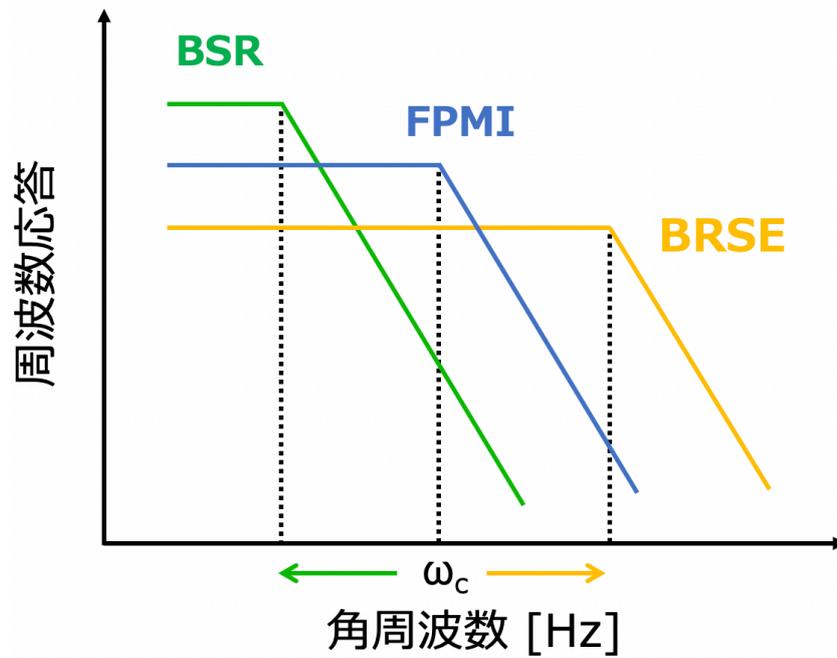


図 2.9 重力波に対する周波数応答の比較. BRSE では FPMI に比べ, 低周波において信号増幅率が低下する一方で, 高周波において信号相殺の影響が小さくなる. BSR ではその逆となる.

2.2.4 レーザー干渉計型重力波検出器の雑音源

重力波による長さ変動は小さく, 重力波検出器は種々の雑音に感度を制限される (図 2.10). ここでは干渉計の感度を定める基本的な雑音源をまとめる.

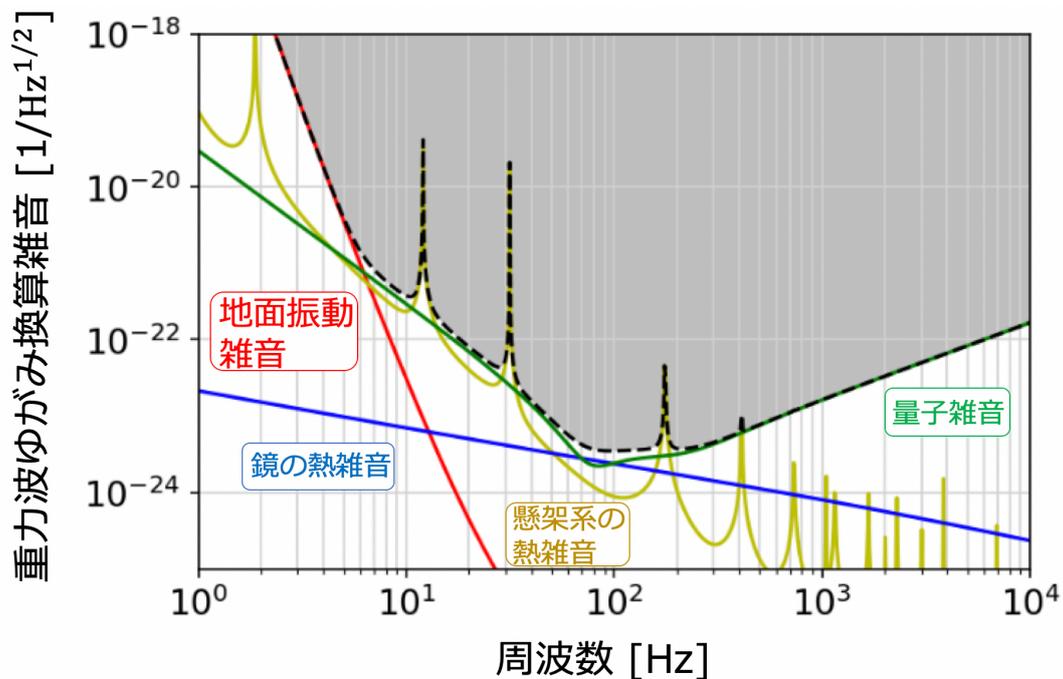


図 2.10 KAGRA の感度曲線. 10 Hz 以下の低周波では主に地面振動や懸架系の熱雑音によって感度が制限される. また, 量子雑音は広い帯域で感度を制限している.

2.2.4.1 量子雑音

干渉計による重力波検出には、レーザー出力に起因する量子雑音がある。量子非破壊測定を行わない場合、量子雑音は光の位相の量子的揺らぎに起因する散射雑音と振幅の揺らぎに起因する輻射圧雑音に分けられる。

散射雑音は、レーザービーム中の光子数の量子的な揺らぎによって生じるノイズである。検出器の出力に現れる重力波の信号は干渉計への入射パワー P_0 に比例し (2.2.2.1 節)、PD での光子数の量子揺らぎは $\sqrt{P_0}$ に比例する。よって、重力は信号へと換算した散射雑音は $1/\sqrt{P_0}$ に比例する。これより、干渉計に入射するレーザーのパワーを上げることで散射雑音を低減することができる。なお、散射雑音は約 100 Hz 以上の高周波帯で感度を制限している [5]。

一方、輻射圧雑音は鏡の表面に作用する輻射圧の揺らぎによって発生するノイズである。このとき、鏡に加わる力の量子揺らぎは $\sqrt{P_0}$ に比例するため、輻射圧雑音は $\sqrt{P_0}/m$ に比例する。よって、鏡の質量を大きくするか、入射レーザーパワーを下げることで輻射圧雑音を改善することができる。なお、輻射圧雑音は数 10 Hz 帯で感度を制限している [5]。

これより、散射雑音と輻射圧雑音はレーザーパワーに対して反対の依存性を持つため、干渉計の感度への寄与はトレードオフの関係となる。また、この関係から導かれる量子雑音の下限は標準量子限界 (SQL) と呼ばれている。この SQL を超えるためには、周波数依存性スクイーミングやホモダイン検波によって量子雑音 (特に輻射圧雑音) を低減するなどの方法がある [29]。

2.2.4.2 熱雑音

有限温度での原子の熱振動は鏡の表面軸位置や弾性形状の変動を引き起こし、干渉計の光路長変動に関わる。この雑音を一般に熱雑音と呼ぶ。

重力波望遠鏡における熱雑音にもさまざまなものがある。例えば熱浴とのやり取りによって懸架ファイバーの物理的振動が励起される [30]。これについて、有限温度 T の熱浴に接した物体では、 $k_B T$ のエネルギーがその物体の各振動モードに分配され、機械的な振動を行う。このとき熱振動のパワースペクトルは揺動散逸定理 [31] より、

$$S_x(f) = -\frac{4k_B T}{2\pi f} \text{Im}[H(2\pi f)], \quad (2.90)$$

と表される。ただし、 k_B は Boltzmann 定数、 T は系が接する熱浴の温度、 H は系が受ける外力から変位への伝達関数、 f は周波数である。これより、例えば

$$H(2\pi f) = \frac{1}{m(2\pi)^2 [f_0^2(1 + i\phi(f)) - f^2]}, \quad (2.91)$$

という伝達関数で表された振動子の熱振動のパワースペクトルは

$$S_x(f) = -\frac{4k_B T}{m(2\pi)^3 f} \frac{f_0^2 \phi(f)}{(f^2 - f_0^2)^2 + f_0^4 \phi^2(f)}, \quad (2.92)$$

となる。ここで、 $\phi(f)$ は散逸と呼ばれ、振動子のエネルギー損失を特徴付ける量である。また、散逸には viscous damping (系の速度に比例した抵抗力が働くモデル) と structure damping (材質に固有の構造減衰モデル) の 2 種類のモデルがあり、それぞれの場合で

$$\phi_v(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0 Q}, \quad (2.93)$$

$$\phi_s(\omega) = \frac{1}{Q}, \quad (2.94)$$

と表される。ただし、 Q は共振の鋭さを表すパラメタであり、この値が大きいほど振動のエネルギーはピークに押し込められる。

また、懸架した鏡に入射するレーザーによる熱は、懸架ファイバーを通して懸架系の上段へ伝えられる。そして、その熱はいくつかのステージを経由して冷却器へ流れる。このとき懸架ファイバーには下段から上段にかけて温度勾配が形成されるが、その温度勾配が緩和される際に変形を生じる。これは熱弾性雑音 (thermoelastic noise) と呼ばれている [32]。

熱雑音を低減するためには鏡や懸架系の部品に機械的損失の小さな材料を選択する必要がある。重力波望遠鏡の中には室温での機械的損失が小さい、すなわち機械的 Q 値が高い (約 10^7) という理由で、鏡の基材や懸架系ファイバーの材料として石英を採用しているものがある [5]。さらに、温度を下げるという方法も考えられ、KAGRA ではこの方法を採用している。極低温環境下において、熔融石英は優れた性能を示さないため、極低温でも高い機械的 Q 値を示すサファイアが鏡基材として採用されている [33]。

なお、鏡の基材やコーティング層の機械的損失や熱伝導率、熱膨張率などの物性的性質に起因するものを鏡の熱雑音、懸架系のワイヤ由来のものを懸架系の熱雑音と呼んでいる (図 2.10)。

2.2.4.3 地面振動雑音

地球上に建設された重力波検出器にとって、地面振動による雑音は避けられないものである。地面は地震がない場合でもあらゆる周波数で微小振動しており、その連続的かつ不規則な地盤の運動は常に鏡を揺らす。その結果、光共振器の長さが変動する。

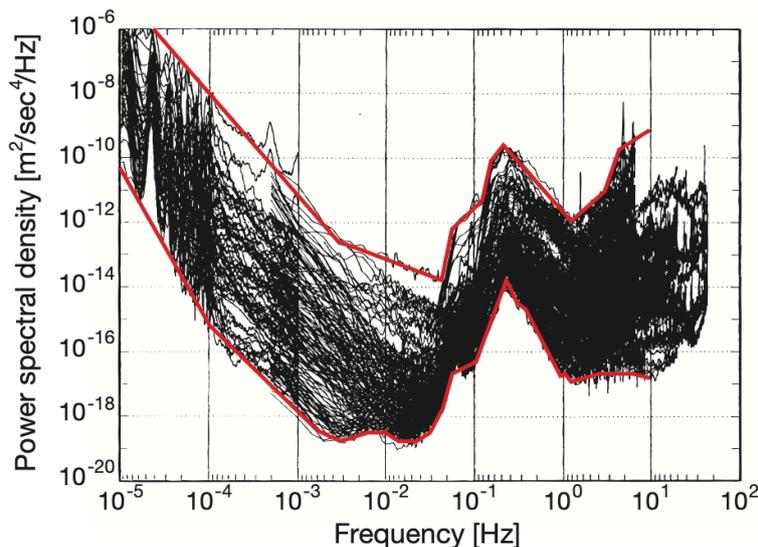


図 2.11 NHNM/NLNM (赤い線がそれらを示す) と世界中の地面振動のスペクトル [34]

地面振動雑音の性質は、J. Peterson によって研究されている [34]。彼は世界中の地震計のネットワークから得られた地面振動雑音スペクトルのカタログを作成した。このデータから NHNM/NLNM (New High/Low Noise Model) と呼ばれる地面振動スペクトルのモデルが構築され、地面振動の上限と下限を与えている (図 2.11)。これを見ると 1 mHz 以下の低周波では地面振動のスペクトルが急激に大きくなっていることがわかる (これは地球の潮汐変動による)。しかし、このような低周波の地面振動では検出器のテストマスも共に移動するため、重力波の観測を妨げることはない。一方、0.1~1 Hz 付近にあるピークは海の波が海岸にぶつかることで発生するが、これは検出器にとって安定的な観測運転を妨げる外乱となる。また、10 Hz 以上は検出器の感度が良いため特に関心のある周波数帯である。このような地面振動の影響を低

減するためには先に述べたように次の2つの点に注意する必要がある。

a) 検出器を静かな場所に建設する

図 2.12 に示した通り、地下 (KAGRA site) は地上 (Virgo/TAMA site) に比べて地面振動レベルが1桁から2桁低い。つまり、地面振動雑音を低減するという観点から見ると、地下に検出器を建設するのが良いと言える。

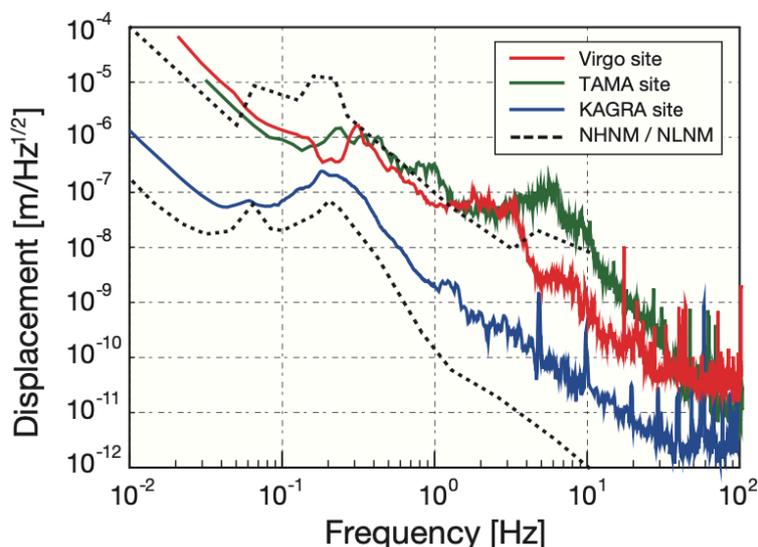


図 2.12 重力波検出器が設置されている場所での地面振動雑音のスペクトル [35]

b) 防振系により地面振動を減衰させる

防振系によって地面振動を減衰し、鏡の支点に伝わる振動を小さくする必要がある。防振系による地面振動の低減については第 3 章に詳記する。

2.2.5 世界のレーザー干渉計型重力波検出器

アメリカの initial LIGO, イタリア・フランスの Virgo, ドイツの GEO600, 日本の TAMA300 といった第 1 世代重力波検出器と呼ばれる検出器では, FPMI にパワーリサイクリングを組み合わせたものが主流であった。現在はそれらの検出器に改良を加え, RSE や真空場のスクイーミングなどの技術を組み込んだ第 2 世代重力波検出器が運用されている。また, 更なる感度向上を目指して, 第 3 世代の重力波検出器を地球上に建設することが計画されている。

以下では世界で用いられている, あるいは計画されている重力波検出器について述べる。

2.2.5.1 現在運用されている重力波検出器

Advanced LIGO

LIGO はアメリカ (リビングストンおよびハンフォード) にある基線長 4 km のレーザー干渉計型重力波検出器である [5]。2つの観測所は約 3000 km 離れているため, この 2 地点における重力波波形の相異性や到達時間の差などから, 重力波信号の真偽の判定が, ある程度できるように考慮されている。1990 年代から重力波検出の研究を牽引してきた LIGO は, 感度向上を目指して RSE や 125 W のハイパワーレーザー, 4 段の鏡懸架系などの技術を導入した後, Advanced LIGO として観測を開始し, 2015 年 9 月 14 日, 世界で初めて重力波を検出した。その後も感度向上を目指した改修作業を続け, 数多くの重力波イベントを観測している。

Advanced Virgo

Virgo はイタリア（ピサ）にある基線長 3 km のレーザー干渉計型重力波検出器である [9]。当初からアウトプットモードクリーナーや Super Attenuator[9] と呼ばれる多段懸架系を導入していた Virgo でも、LIGO と同様の改良が行われた。そして 2017 年 8 月、Advanced Virgo として LIGO と共に史上 4 例目となる重力波検出を達成した。

GEO600

ドイツ（ハノーヴァ）にある基線長 600 m のレーザー干渉計型重力波検出器である [15]。GEO600 には腕共振器はないが、マイケルソン干渉計にパワーリサイクリング・シグナルリサイクリングを併用しており、特定の周波数帯域で高感度を実現した。その後、Advanced LIGO などとの高周波での相関検出を目指して改修され、現在は 1 kHz 以上での周波数で感度を高めている。

KAGRA

日本（岐阜県飛騨市神岡町）にある基線長 3 km のレーザー干渉計型重力波検出器である [33]。KAGRA では熱雑音低減のためサファイア製の鏡を 20 K まで冷やし、かつ地面振動の影響を減らすために地下環境で運用するという特徴を持つ。地面振動については第 3 章、KAGRA の干渉計のレイアウトや懸架系および冷却システムについては第 3, 4 章を参照されたい。

2.2.5.2 計画中の重力波検出器

LIGO-India

LIGO-India は Advanced LIGO の部品を一式インドに送り、アメリカとインドの共同で Advanced LIGO に相当する重力波検出器をインドに建設しようという計画である。LIGO-India の完成により 6 台の干渉計による国際ネットワークが構築され、波源の位置特定精度の更なる向上などが見込まれる。

Cosmic Explorer と Einstein Telescope

Cosmic Explorer と Einstein Telescope はどちらも将来建設が予定されている第 3 世代の地上重力波検出器である。Cosmic Explorer では L 字型で 1 辺 40 km の基線長 [36]、Einstein Telescope では 1 辺 10 km の正三角形にすることが予定されている [37]。また、腕の長さを伸ばしたり、低吸収のコーティングや周波数依存スキージングなどの技術を活用することも計画されている。特に、低温かつ地下環境での運転が予定されている ET では、KAGRA で培われた運用技術が応用可能であることが期待される。

これらの新しい検出器は感度を今よりも 10 倍以上改善することを目指している。ここで、重力波検出器の感度は検出可能な波源までの距離に反比例する。つまり感度が 10 倍良くなれば、10 倍の距離、検出頻度（体積）で言うと 1000 倍に膨れ上がることになる。

次世代の検出器ではこのような大幅な感度向上によって、現在の検出器では叶わないサイエンス（例えば 2.1.4.2 で述べたパルサーの軸対称からのずれは非常に小さく、現在運転中の重力波検出器ではパルサーからの重力波を捉えることはできない可能性がある。他にも、あらゆる天体に対して物理学的なモデルを確定させるためには様々な質量・スピンを持った相当数の重力波信号が必要であることを考えると、現在の検出器では検出数が不十分である恐れがある。）を達成するという目的がある。

第 3 章

懸架系による防振

地上の重力波検出器の鏡は地面振動による外乱の影響を常に受けている。そのため、防振技術が必要不可欠になる。地面振動による鏡の揺れを低減するためには、地面振動が元々静かな場所に検出器を建設し、さらに防振系により振動を減衰させるという方法が考えられる。

この章では、重力波検出器における防振の基本的な考え方について述べる。まず地多段振り子による防振について記述し、その後 KAGRA の防振系について紹介する。

3.1 受動防振

第 2 章で述べたように、レーザー干渉計型重力波検出器では重力波の到来による自由質点の固有距離の変化を測定する。しかし、地球上では重力場の存在により自由質点を作ることが不可能である。そこで、干渉計を構成する鏡や BS を振り子を用いて懸架することで、共振周波数より十分高い周波数で自由質点とみなしている。

同時に、この振り子は地面振動からの防振を実現する役割を持つ。以下では振り子を用いた防振システムについて説明する。

3.1.1 単振り子

受動防振はワイヤで吊られた質点からなる単振り子でモデル化することができる。図 3.1 の左に示すように、質点の質量を m 、ワイヤ長を l 、ワイヤの張力を T 、質点と地面の変位をそれぞれ $x(t)$ 、 $x_0(t)$ で表すと、この系の運動方程式は

$$\begin{aligned} \text{鉛直方向} : 0 &= T_y - mg = T \times \frac{\sqrt{l^2 - (x(t) - x_0(t))^2}}{l} - mg \\ \text{水平方向} : m\ddot{x}(t) &= -T_x = -T \times \frac{x(t) - x_0(t)}{l} \end{aligned} \quad (3.1)$$

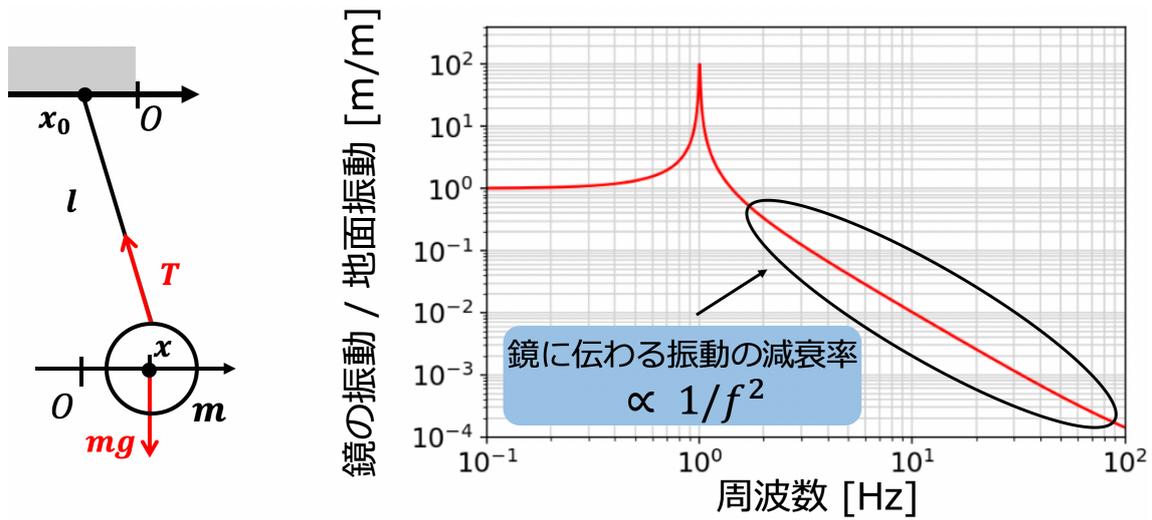


図 3.1 単振り子（ワイヤで吊られた質点）による受動防振のモデル（左）と、地面振動に対する防振比（右）．共振周波数よりも高い周波数において、地面から鏡に伝わる振動が周波数の 2 乗で減衰している．つまり、共振周波数以上の周波数での地面振動の影響が大きく低減されている．

ここで、水平方向の変位 $x(t) - x_0(t)$ はワイヤ長に比べて十分小さいとすると、

$$\frac{\sqrt{l^2 - (x(t) - x_0(t))^2}}{l} = \sqrt{1 - \left(\frac{x(t) - x_0(t)}{l}\right)^2} \simeq 1, \quad (3.2)$$

であるから、鉛直方向の運動方程式は

$$0 = T - mg, \quad (3.3)$$

となる．これを水平方向の運動方程式に代入すると、

$$m\ddot{x}(t) + \frac{mg}{l}(x(t) - x_0(t)) = 0. \quad (3.4)$$

両辺を Fourier 変換すると

$$-m\omega^2 \tilde{x}(\omega) + \frac{mg}{l}(\tilde{x}(\omega) - \tilde{x}_0(\omega)) = 0. \quad (3.5)$$

よって防振比は

$$\frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{x}_0(\omega)} = \frac{mg/l}{-m\omega^2 + mg/l} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.6)$$

ここで、 ω_0 は共振角周波数で、 $\omega_0 \equiv 2\pi f_0 = \sqrt{g/l}$ である．

この防振比を表したものが図 3.1 の右側である．これを見ると共振周波数よりも高い周波数において、地面から鏡に伝わる振動が周波数の 2 乗で減衰していることが分かる．つまり、共振周波数以上の周波数での地面振動の影響が大きく低減される．しかし、重力波による干渉計のアーム長変化は 10 ~ 100 Hz において 10^{-20} m/ $\sqrt{\text{Hz}}$ 程度であるのに対し、地面振動の大きさは地下環境においても 10^{-12} ~ 10^{-10} m/ $\sqrt{\text{Hz}}$ ほどの大きさである [38]．よって地面振動を 10^{-8} ~ 10^{-10} 倍に抑える必要があるため、単振り子では防振比が十分ではない．もし求められる防振比を単振り子で実現しようと思うと、約 100 m の長さの振り子を使用しなければいけないが、これは現実的ではない．

3.1.2 2 段振り子

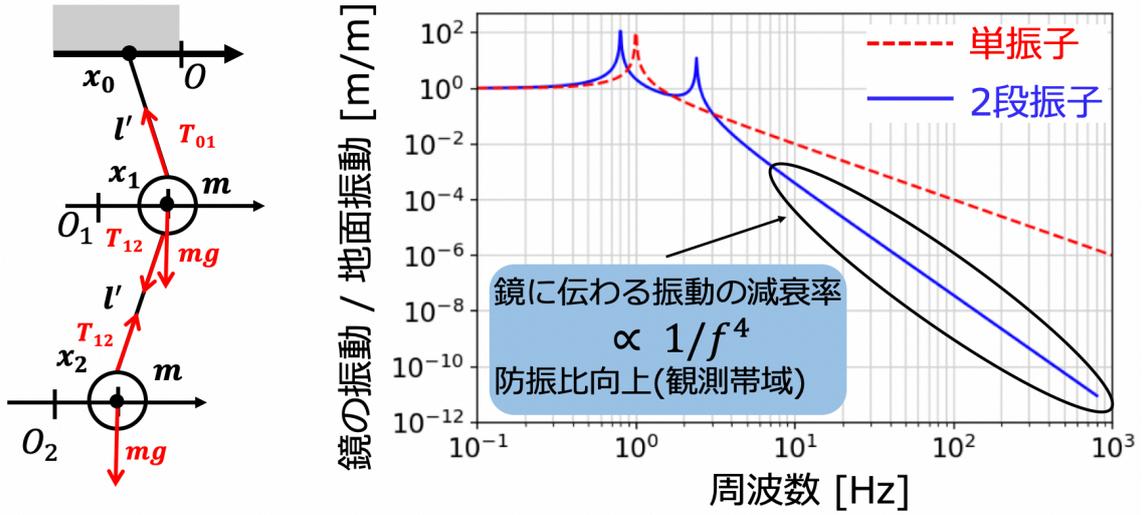


図 3.2 2 段振り子のモデル（左）と、全長が同じ場合の単振り子・2 段振り子の防振比の比較（右）．2 段振り子の方が、観測帯域（10～数 100 Hz）において優れた防振比をもつことが分かる．

そこで、次は 2 段振り子を考える．図 3.2 の左に示すように、質点の質量を m 、ワイヤ長を l' 、ワイヤの張力を T_{01}, T_{12} 、質点と地面の変位をそれぞれ $x_1(t), x_2(t), x_0(t)$ で表すと、1 段目の質点の運動方程式は

$$\begin{aligned} \text{鉛直方向} : 0 &= T_{01,y} - T_{12,y} - mg = T_{01} \times \frac{\sqrt{l'^2 - (x_1(t) - x_0(t))^2}}{l'} - T_{12} \times \frac{\sqrt{l'^2 - (x_1(t) - x_2(t))^2}}{l'} - mg \\ \text{水平方向} : m\ddot{x}_1(t) &= -T_{01,x} - T_{12,x} = -T_{01} \times \frac{x_1(t) - x_0(t)}{l'} - T_{12} \times \frac{x_1(t) - x_2(t)}{l'} \end{aligned} \quad (3.7)$$

2 段目の質点の運動方程式は

$$\begin{aligned} \text{鉛直方向} : 0 &= T_{12,y} - mg = T_{12} \times \frac{\sqrt{l'^2 - (x_1(t) - x_2(t))^2}}{l'} - mg \\ \text{水平方向} : m\ddot{x}_2(t) &= T_{12,x} = T_{12} \times \frac{x_1(t) - x_2(t)}{l'} \end{aligned} \quad (3.8)$$

1 段振り子の場合と同様に、質点の変位がワイヤ長に比べて十分小さいとすると、2 段目の質点の鉛直方向の運動方程式より

$$0 = T_{12} - mg, \quad (3.9)$$

となり、これを用いると、1 段目の質点の鉛直方向の運動方程式は

$$0 = T_{01} - 2mg, \quad (3.10)$$

となる．式 (3.9), (3.10) を式 (3.7), (3.8) に代入すると両質点の水平方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) + \frac{2mg}{l'}(x_1(t) - x_0(t)) + \frac{mg}{l'}(x_1(t) - x_2(t)) &= 0 \\ m\ddot{x}_2(t) - \frac{mg}{l'}(x_1(t) - x_2(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Fourier 変換してまとめると

$$\begin{pmatrix} 3\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0'^2 \\ -\omega_0'^2 & \omega_0'^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega_0'^2 \tilde{x}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

ここで $\omega'_0 \equiv \sqrt{g/l'}$ とした. これを解いて,

$$\frac{1}{\tilde{x}_0} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega^4 - 4\omega_0'^2 \omega^2 + 2\omega_0'^4} \begin{pmatrix} 2(\omega_0'^4 - \omega_0'^2 \omega^2) \\ 2\omega_0'^4 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

よって防振比は

$$\frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_0} = \frac{2\omega_0'^4}{\omega^4 - 4\omega_0'^2 \omega^2 + 2\omega_0'^4}. \quad (3.14)$$

2 段振子の全長が単振り子と同じ場合, 両者の防振比を比較すると図 3.2 の右側のようになる. 2 段振り子の場合, 共振周波数よりも高い周波数において, 地面から鏡に伝わる振動は周波数の 4 乗で減衰し, 単振り子と比べて防振比が向上しているのが分かる.

3.1.3 多段振り子

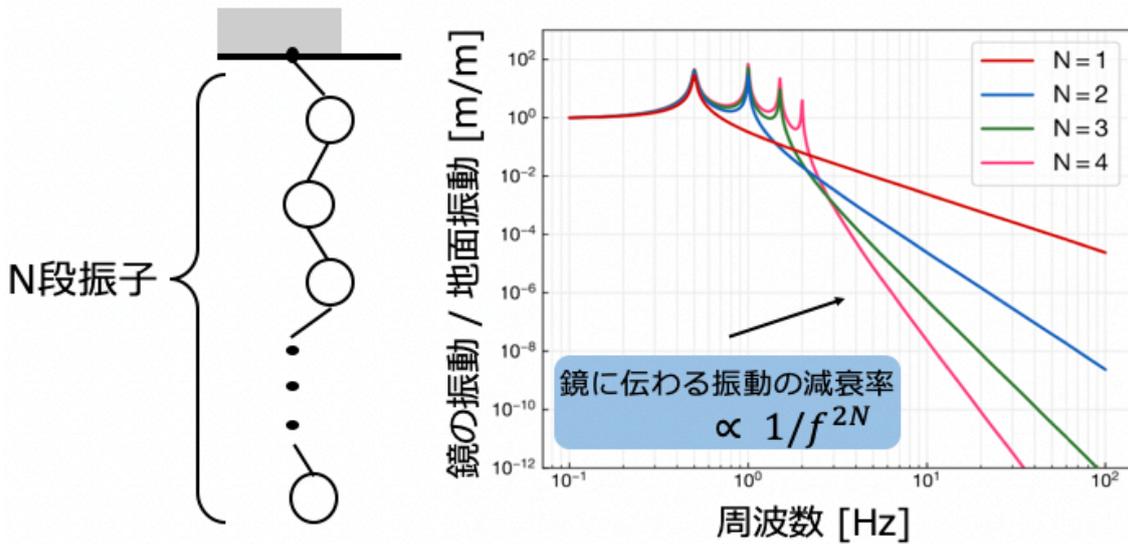


図 3.3 N 段振り子のモデル (左) と, 防振比の比較 (右). 共振周波数以上では地面から鏡に伝わる振動は周波数の $2N$ 乗で減衰する.

同様にして, N 段振り子の場合も計算する. 質点の質量を m , ワイヤ長を l , k 本目のワイヤ ($k-1$ 段と k 段をつなぐワイヤ) の張力を $T_{k-1,k}$, 質点の変位をそれぞれ $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$, 地面の変位を $x_0(t)$ で表すと k 段目の質点の水平方向の運動方程式は

$$m\ddot{x}_k(t) = \begin{cases} -T_{k-1,k} \frac{x_k(t) - x_{k-1}(t)}{l} - T_{k(k+1)} \frac{x_k(t) - x_{k+1}(t)}{l} & (k = 1, 2, \dots, N-1) \\ -T_{N-1,N} \frac{x_N(t) - x_{N-1}(t)}{l} & (k = N) \end{cases}. \quad (3.15)$$

先ほどまでと同様に, 水平方向の変位がワイヤ長に比べて十分小さいとすると, 上から k 本目のワイヤの張力は

$$T_{k-1,k} = (N+1-k)mg, \quad (3.16)$$

と書ける. よって, 運動方程式は

$$m\ddot{x}_k(t) = \begin{cases} -(N+1-k) \frac{mg}{l} (x_k(t) - x_{k-1}(t)) - (N-k) \frac{mg}{l} (x_k(t) - x_{k+1}(t)) & (k = 1, 2, \dots, N-1) \\ -(N+1-k) \frac{mg}{l} (x_N(t) - x_{N-1}(t)) & (k = N) \end{cases}, \quad (3.17)$$

さらに式 (3.21),(3.22),(3.23) に注意すると

$$\frac{\tilde{x}_N}{\tilde{x}_0} = \frac{N\omega_0^2 \times (\omega \text{ の } 0 \text{ 次式})}{(\omega \text{ の } 2N \text{ 次式})}, \quad (3.28)$$

である（対角成分の積は $(\omega^2)^N$ 次式 = ω の $2N$ 次式になる）。

これより、 N 段振り子では共振周波数以上において、地面から鏡に伝わる振動が周波数の $2N$ 乗で減衰することが分かる。よって、重力波検出器では必要な防振比を得るために多段振り子を用いており（図 3.3）、特に KAGRA では 9 段振り子となっている。

3.2 KAGRA における防振懸架系の概要

この節では、KAGRA で用いられている防振懸架系について記述する。そのために、まず KAGRA の干渉計の構成を示し、その後各懸架系の説明を行う。

3.2.1 KAGRA における防振懸架系の位置

KAGRA の干渉計は、DRFPMI の主要部だけでなく、多くの光学部品で構成されている。図 3.4 に KAGRA の Optical Layout を示した。

光源から出たレーザーは増幅機で高出力化され、空間モード整形とさらなる周波数安定化のために、ミラーを吊り下げた三角共振器である IMC (Input Mode Cleaner) に送られる。IMC から出た光は FI (Faraday Isolator)¹ を通り、空間モード整形機能を持つ IMMT (Input Mode Matching Telescope) で拡大されて干渉計の主要部に送られる。

干渉計の主要部となるのは、長さ 3 km の 2 本のアームからなる DRFPMI である。アーム共振器はそれぞれ X アーム、Y アームと呼ばれ、ITM と ETM で形成されている。入射ビームは BS で垂直な 2 方向に分割され、アーム共振器に送られる。そしてアーム共振器からの反射ビームは BS で再結合し、干渉した光は symmetric port と呼ばれる入射方向へ戻っていく。

また、symmetric port では PRM がビームを再びアーム共振器に反射させることで、PRM と ITM (ITMX と ITMY の BS からの平均距離に位置する仮想 ITM) で形成される PRC でパワーを蓄積し、アーム共振器内の実効パワーを増幅させる。同様に、マイケルソン干渉計の出力側 (anti-symmetric port) にも SRC が実装されている。観測時には干渉光は暗く保たれるが、重力波到来時は anti-symmetric port から微量のパワーが漏れ出す。この漏れた光子をアーム共振器に戻し、観測帯域の調整を行う。

最後に SRC から漏れたビームは OMMT (Output Mode Matching Telescope) で空間モード整形とビーム半径の縮小がなされ、OMC (Output Mode Cleaner) を通って PD で検出される。

¹ 反射光が逆入してレーザー光源に戻るのを防ぐためのものである。

KAGRA optical layout

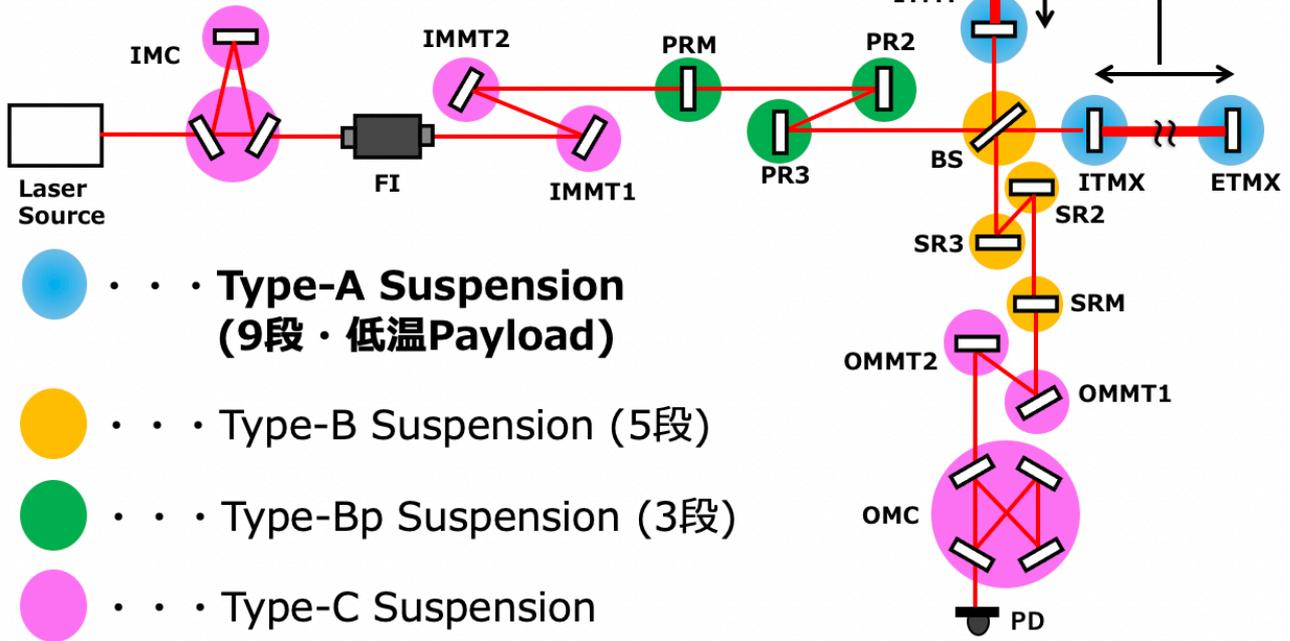


図 3.4 KAGRA の Optical Layout

3.2.2 防振懸架系

このように KAGRA の主干渉計は多数の光学系で構成されており、防振懸架系についても主に Type-A, Type-B, Type-Bp の 3 種類がある。

Type-A Suspension はサファイア鏡（テストマス）を吊るすための防振懸架系で、全 9 段・高さ 13.5 m と 3 種類の中でも最大となっている。これはサファイア鏡の局所運動がアーム長の変化に直接関わるため、最も高い防振比が要求されるからである。また、9 段の内、上部の 5 段は Tower と呼ばれる。一方、サファイア鏡を含む下 4 段は低温懸架装置 (Cryogenic Payload) と呼ばれ、20 K という極低温に冷却される。Type-A Suspension（特に低温懸架装置）は本論文の主な対象であるため、第 4 章で詳細を記す。

Type-B Suspension は BS と SRM, SR2, SR3 に使用される 2 番目に大きな防振システムである。IP (Inverted Pendulum) を含む 5 段の懸架系であり、室温で運用される。

Type-Bp Suspension は Type-B を縮小した 3 段の懸架系で、PRM, PR2, PR3 に使用される。IP はないが Payload 部分の設計は Type-B と同じで、室温で運用される。

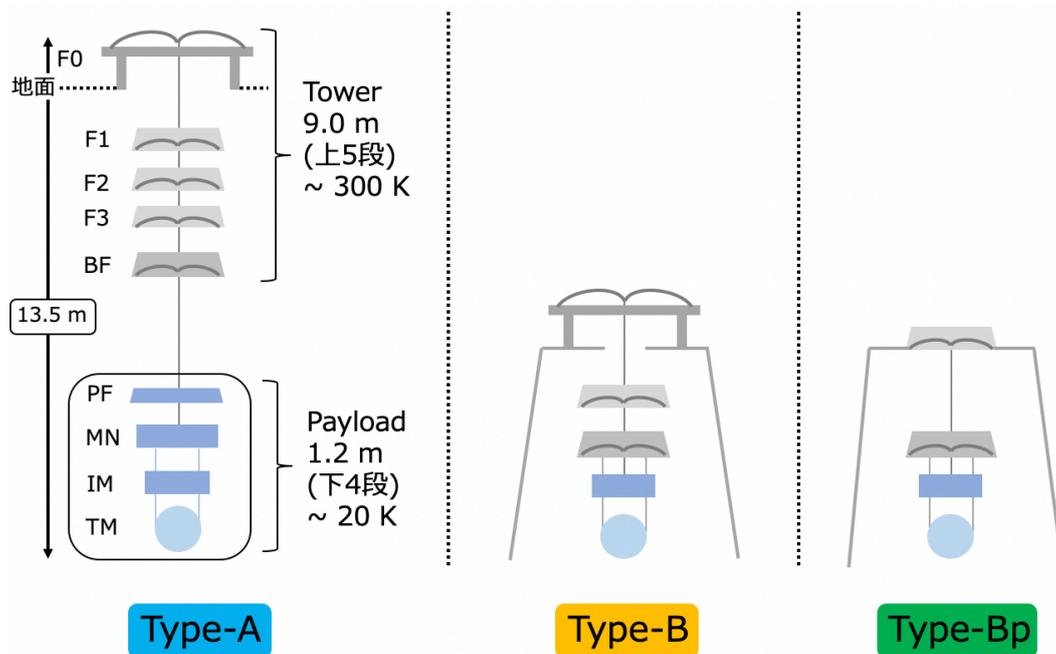


図 3.5 主干渉計で用いられる 3 種類の懸架系の概略図

3.2.3 干渉計の制御フェイズと要求値

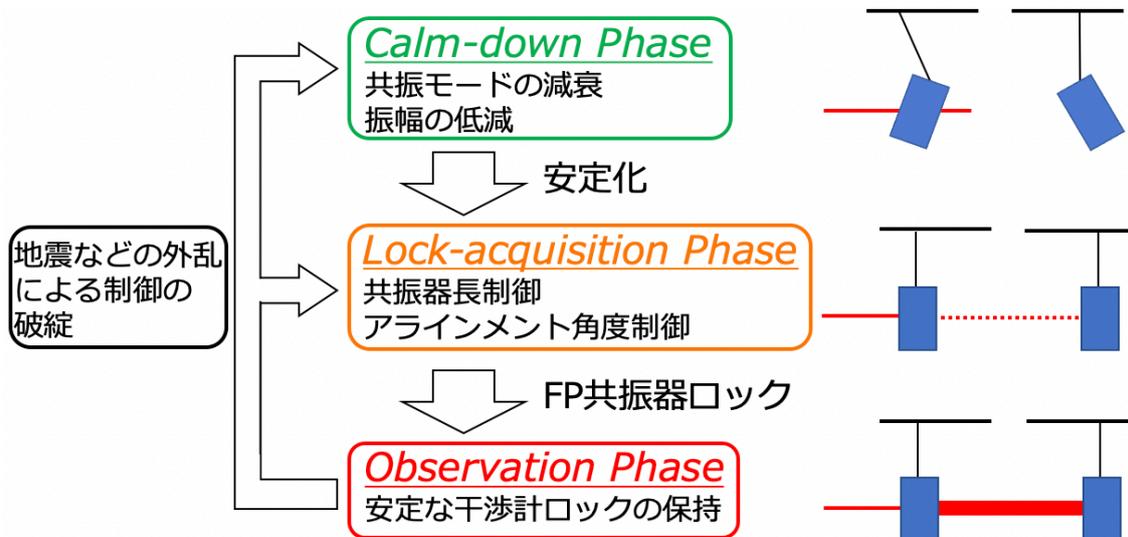


図 3.6 干渉計の制御フェイズ

防振懸架系の観点から考えると、干渉計の安定動作のためには、懸架系の機械的共振による鏡の過大な揺れを抑える必要がある。KAGRA ではそのような振動抑制のためにアクティブ制御を行っている。防振懸架系に対するアクティブ制御では、まずセンサによって懸架系の動きを検知する。その後、デジタルサーボシステム上で適切なフィルタをかけ、その信号を非接触のアクチュエータによって系にフィードバックしている。

このようなアクティブ制御は、安定な動作のためにサーボの設計に工夫が必要などの難点がある。しかし、懸架系をインストールした後であっても下記の干渉計フェイズに合わせて制御法を変えることができ、

その柔軟性が大きな利点である。

ここで、重力波干渉計はいきなり観測状態を作り出せるわけではない。まず、懸架された鏡の揺れを抑えて安定化し、それから共振器の長さや角度の制御を行うというように、段階を追いながら観測可能な状態にする必要がある。これについて、KAGRAにおける干渉計の制御フェイズは懸架系の観点から、Calm-down, Lock-acquisition, Observationの3つに分類される。これらのフェイズ間の遷移を図3.6に示す。

Calm-down フェイズは、鏡が大きな振幅で揺れて干渉計のアライメントが保てなくなり、有意な信号が出なくなった状態である。この段階では鏡の振動を抑制してノミナル位置に戻し、ロックを開始できるようにする必要がある。なお、ロックとは一般に物理量を目的の値に制御して保持することを指し、この場合はFP共振器を共振状態に保つことを表している。また、この段階では、制御ノイズの削減よりも大きな外乱に対するロバスト性が重要視される。つまり機械的共振のモード減衰が重要となり、ここでは振動が $1/e$ に収まる時間が60秒以下であることが要求される。

次にLock-acquisition フェイズとは、FP共振器を共振状態にロックして観測準備を行う段階である。干渉計信号の線形領域は非常に小さいため、このフェイズで鏡の速度を十分小さくする必要がある(L方向 $<240 \mu\text{m/s}$)。また、より感度の高い干渉計センサを用いた制御ループの作動のために、WFS (Wave Front Sensor) [39] など、角度変動を抑えるような局所的な制御も必要である(P,Y方向 $<880 \text{ nrad}$)。これは共振器を構成する鏡は3 km 離れており、小さな角度変化でも干渉計には大きな影響を与えるからである。なお、懸架系の自由度については次節に記した。

最後のObservation フェイズは干渉計の全共振器をロックし、重力波観測を行う段階である。ここで最も重要なのは、より良い感度で観測を行うために制御ノイズを小さくすること、および安定した運転のために鏡の変位や向きをある範囲に保つことである。

3.2.4 懸架系の自由度

3.1節では1次元運動について記述したが、本来は3次元の剛体を考えるべきである。そこで全部で6つの自由度 (DoF:Degree of Freedom) を図3.7に示した通りに定義する(並進軸:Longitudinal, Transverse, Vertical, 回転軸:Roll, Pitch, Yaw)。3つの並進軸は右手系を成し、3つの回転軸は並進軸周りの右ねじの回転が正方向となるように定義されている。本論文では、これら6つの自由度を(L, T, V, R, P, Y)のように頭文字をとって略記することがある。

光共振器や干渉計の構成にはビーム軸方向だけでなく、他の自由度の運動も非常に重要である。L方向の運動は光路長の変化に直結し、PとYの回転はビームアライメントに影響する。また、TとV方向の運動はビームのセンタリングに関わる。

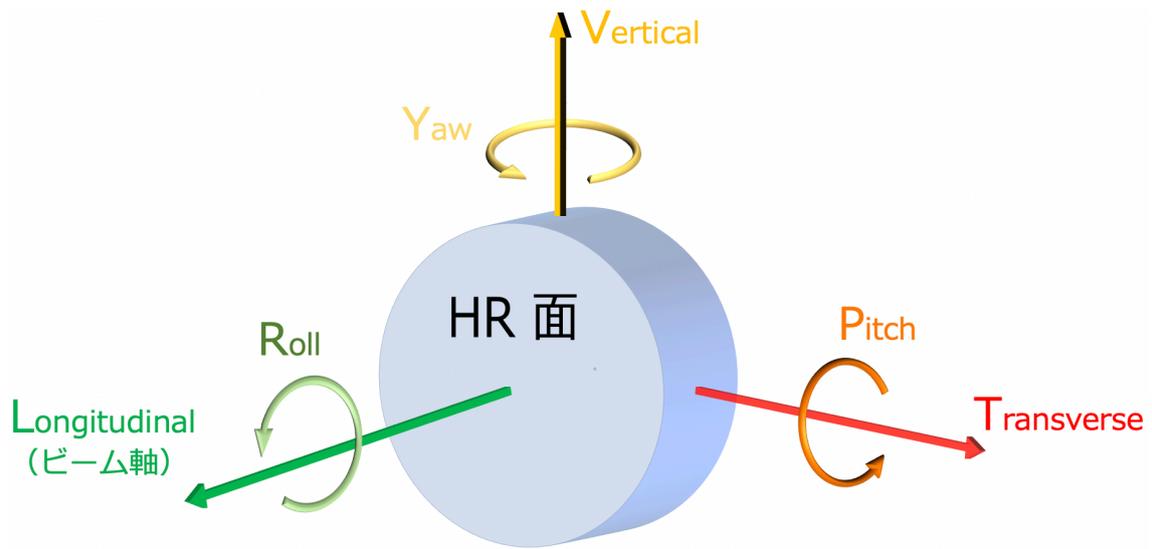


図 3.7 懸架系の運動の自由度の定義. HR 面は高反射率コーティングを施した面を示す. 本論文では, これら 6 つの自由度を (L, T, V, R, P, Y) のように頭文字をとって略記することがある.

第 4 章

KAGRA Type-A Suspension

先の章で述べたように Type-A Suspension は大きく分けて Type-A Tower と低温懸架系 (Cryogenic Payload) からなる 9 段の振り子である (図 4.1) . この章では Tower および低温懸架系部分の各ステージや用いられるセンサ・アクチュエータについて詳細を記述する.

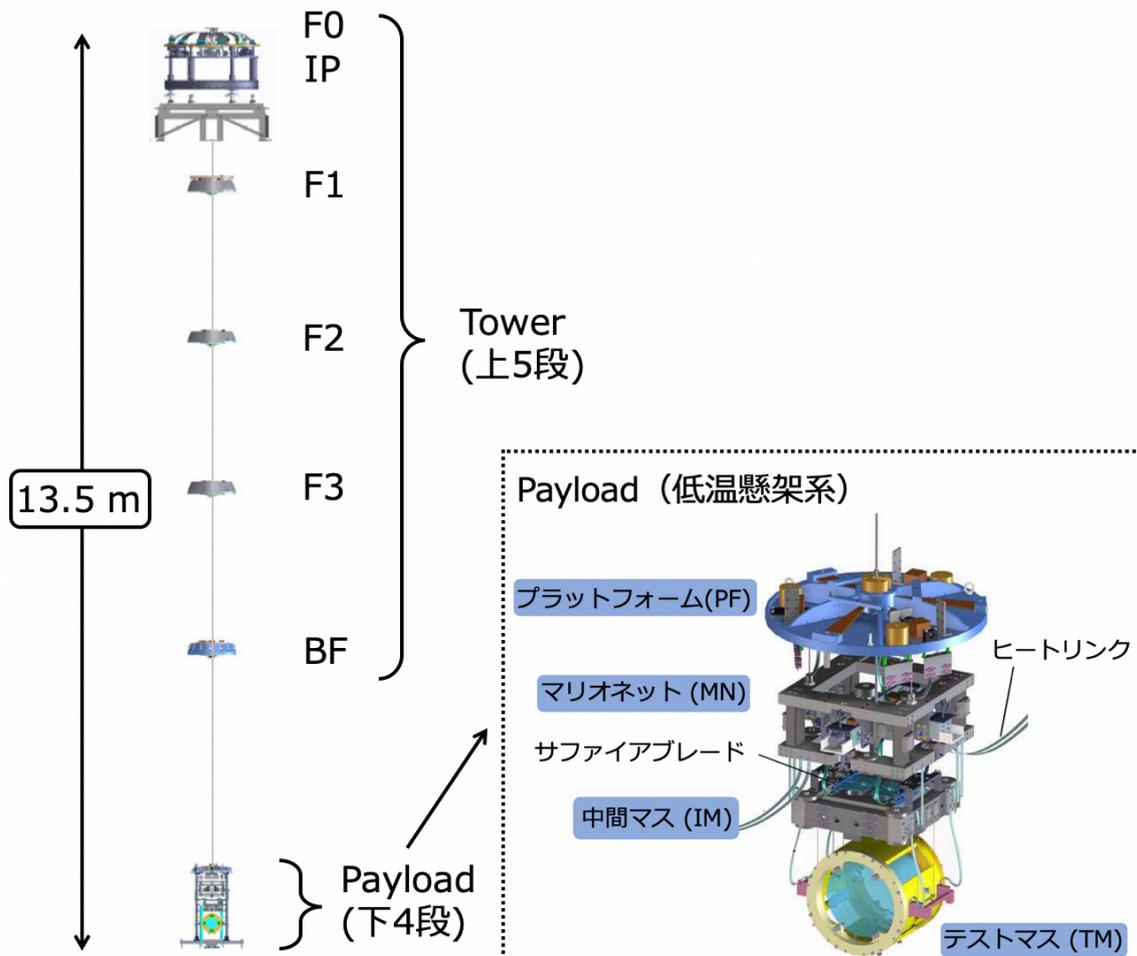


図 4.1 Type-A Suspension の全体図 (左) および低温懸架系 (Cryogenic Payload) 部分 (右下)

4.1 Type-A Tower

4.1.1 機構

Type-A Tower は主に 1 Hz 以下の低周波防振のための部分である [38]. その構成について, IP pre-isolation ステージは, 3 本の IP (Inverted Pendulum) で支えられている. また, GAS フィルタチェーンは トップステージに取り付けられたトップフィルタ (F_0) から始まり, フィルタ 1, 2, 3 (それぞれ F_1, F_2, F_3) と名付けられた後続のステージが続き, BF (Bottom Filter: ボトムフィルタ) と呼ばれる 5 段目で終了する. IP および GAS の仕組みについては補遺 A に記載した.

4.1.1.1 IP pre-isolation ステージ

IP pre-isolation ステージはプレアイソレータと呼ばれ IP, ベースリング, トップ GAS フィルタ (F_0) で構成されている (図 4.2). このステージは 0.1Hz 以下の低周波からの防振, および防振懸架系全体の位置制御という役割を持つ.

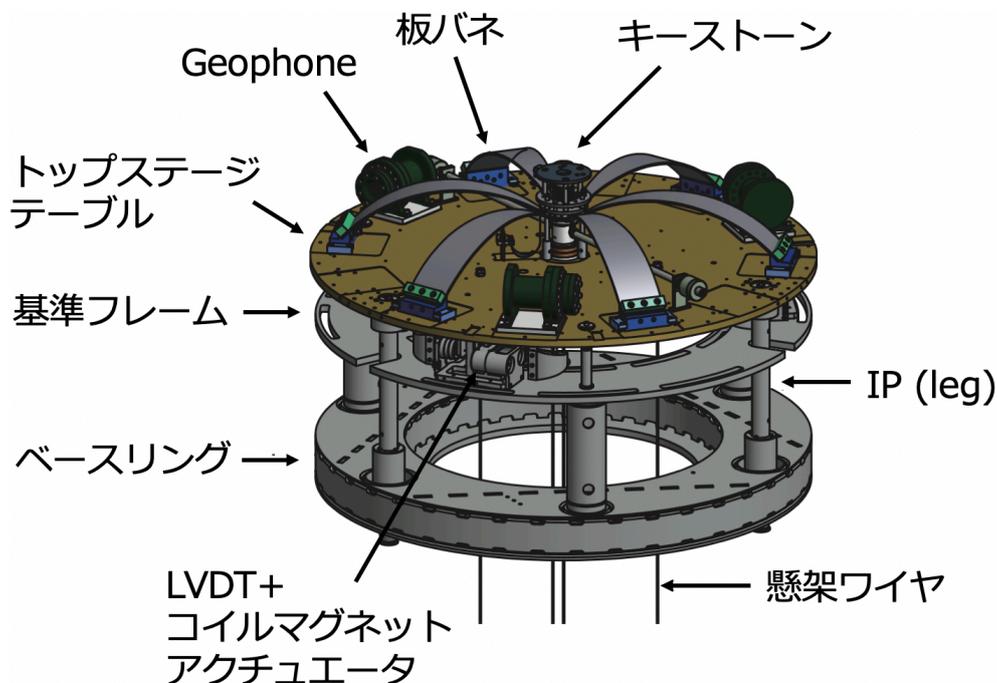


図 4.2 IP pre-isolation ステージ (プレアイソレータ)

トップステージは 3 本の IP の脚で 120° ごとに支持されている. それらの間に位置する 3 本の支柱はベースリングと基準フレームを接いでおり, そこに LVDT とコイルマグネットアクチュエータのユニットが取り付けられている. また, 地面の揺れに依存しない慣性センサとして, 逆真空容器に収納された Geophone がトップステージに搭載されている. なお板バネの先端はトップフィルタの中央にあるキーストーンに接続されている. メインチェーンの懸架ワイヤの 1 本はこのキーストーンに繋がれており, 他の 3 本の magnet damper 用ワイヤはトップステージテーブルに直接接続されている.

IP の脚は高さ 520 mm であり, Virgo の Super Attenuator[9] に使用されている高さ 6m のものと比べてはるかに小さい. この IP は, 脚の中空円筒の両端にフレクシャ接合部を有している. フレクシャ接合部には, 優れた強度と靱性を持つマレージング鋼が使用され, 最上段の変位に伴う強固な弾性屈曲が可能に

なっている。各 IP はコーンベローズの上に乗せられた上でスクリージャッキにより支えられ、高さを調節することで接地面を水平にしている。

F_0 については、その構造と機能が他の GAS フィルタと同様であるため、次の小節で説明する。また、センサおよびアクチュエータについても後ほど記述する。

4.1.1.2 GAS フィルタチェーン

Type-A Suspension には、水平方向と垂直方向の両方の地面振動減衰を満たすために 5 段の GAS フィルタチェーンがインストールされている。最上段に実装された GAS ステージはトップ GAS フィルタと呼ばれ、続く 3 段はよりコンパクトな設計の GAS フィルタ（標準 GAS フィルタ）になっている。なお、Tower 部分の最終段は BF (Bottom Filter) と呼ばれ、基本的には標準 GAS フィルタと同じ機構だが、BF は Tower と低温懸架系とのインターフェイスとして重要な機能を持つため、区別されている。

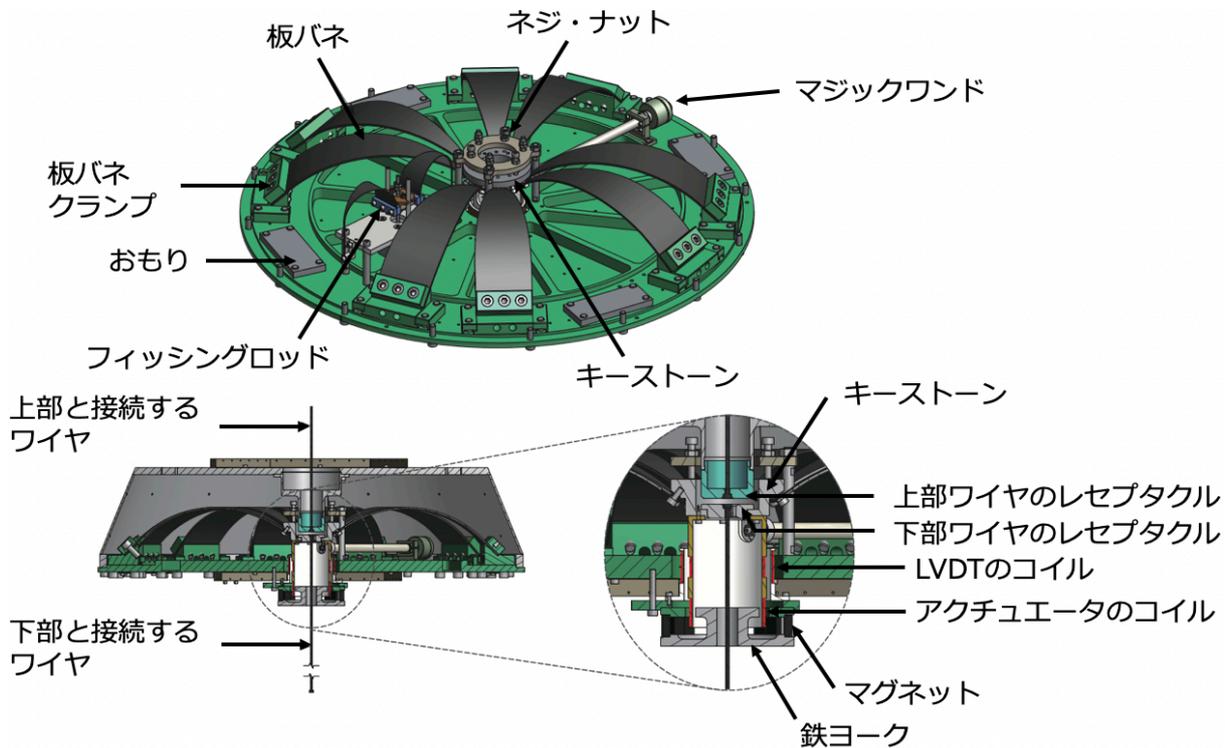


図 4.3 GAS フィルタ

標準 GAS フィルタ (F_1, F_2, F_3) の基本構造は、図 4.3 に示すように円盤状のベースプレート上に実装されている（動作原理については補遺 A に記した）。二等辺三角形の板バネが放射状にベースプレートに取り付けられており、曲げられた板バネの先端は下段用の懸架ワイヤが引っ掛けられるキーストーンに固定されている。これにより生まれる軸対称の制約から、キーストーンは垂直方向にのみ振動することができる。なお、その上下振動は LVDT 変位センサでモニターしてコイルマグネットアクチュエータで制御している。また、上段からのワイヤは三角錐型キャップの中心で引っ掛けられ、その半径方向の端でネジによってベースプレートに固定される。キーストーンとワイヤレセプタクルは懸架位置が質量中心に近くなるように配置されており、さらにキーストーンには振動中心を補正するためのマジックワンドが取り付けられている。

また、各板バネは曲がった状態で均一な応力分布になるように設計されている。さらに、その幅・厚み・枚数は、その最適荷重がステージからの吊り下げ重量と等しくなるように調整されている。表 4.1 に示した通り、重い荷重を支えるステージほど、所定の共振周波数を得るために大きな反バネ効果が必要となるため、

F_0 は板バネが厚く、また標準 GAS フィルタは上部のものほど板バネの枚数が多くなっている。

	厚み [mm]	最大幅 [mm]	板バネの枚数
F_0	5.0	125	6
F_1	2.4	80	12
F_2	2.4	80	10
F_3	2.4	80	8
BF	2.4	80	5

表 4.1 GAS フィルタの板バネのパラメタ (Type-A) . F_1, F_2, F_3 が標準フィルタである

4.1.1.3 BF

BF は、Type-A サスペンションのタワー部にある最後の GAS ステージである。基本的な機械設計は標準 GAS フィルタと同じだが、Tower と Cryogenic Payload のインタフェースとして特別な機能をいくつか持っている。

BF の重要な役割の 1 つとして、懸架系の下部において比較的大きな作動範囲の制御を行うことが挙げられる。このステージにはセンサ (BF LVDT) とアクチュエータが一体となった BF damper と呼ばれる装置が搭載されており、地面に対する BF の動きを 6 自由度で測定し制御することができる。BF では、アクチュエータから発生するノイズが鏡に伝わりにくいいため、Payload よりも大きな作動範囲を実現することができるのである。

また、BF damper は単線懸架系のねじれ運動を減衰することができる。懸架系のねじれは、並進方向の地面振動と連動して発生する。そのため Y 方向には低周波の機械的共振によって十分な減衰が得られるので、干渉計の感度に関わるノイズという観点ではねじり振動はあまり問題にならない。しかし、懸架系がキックされて Y 方向の振動が励起されると減衰するのに長い時間を要し、鏡の位置がずれて干渉計のデューティサイクルが低下する。BF の位置は基本 Y モードのノード (上部の GAS フィルタの懸垂点) から離れているため、BF damper を作動させることによって効果的なダンピングを適用できる。

4.1.2 センサ・アクチュエータ

3.1 節で振り子による受動防振について述べた。しかし、受動防振は共振周波数より高い周波数帯において地面振動の影響を抑えるものであり、共振周波数付近およびそれ以下の帯域では能動防振が必要になる。これはセンサで読み取った振動を、アクチュエータで力を加えることにより減衰させるものである。能動防振はセンサ・制御フィルタ・アクチュエータから成るが、この節では Type-A Tower 部分で用いられるセンサおよびアクチュエータについて述べる (低温懸架装置で用いられるセンサ・アクチュエータは 4.2.2 節、また制御フィルタについては第 6 章参照)。

4.1.2.1 LVDT

LVDT (Linear Variable Differential Transformer) は誘導結合したコイル間の変調磁界を利用した相対変位センサであり [40] (図 4.4) , IP や GAS フィルタの動きを読み取っている。その動作原理は次の通りである。

1 次コイルに約 10 kHz の正弦波変調信号を送ると、その周囲に振動磁界が発生する。そして、その磁界の変化を同軸上に置かれた 2 次コイルが感知し、誘導電圧を発生させる。2 つの 2 次コイルは互いに逆巻きなので、1 次コイルを 2 次コイルの中心に置くと誘導電圧は打ち消される。ここで、1 次コイルが中心からず

れると相互インダクタンスが変化し、誘導電圧の差動がその後の読み出しで正味の電圧として現れる。この差動電圧は増幅されてミキサーに送られ、ミキサーはこの振動電圧を復調して1次コイルの変位（低周波信号）を得る。

LVDTの特徴は変位に対する線形応答が、軸方向の大きなダイナミックレンジで得られることである。KAGRAではそのダイナミックレンジはcm、分解能は $\text{sub}\mu\text{m}$ であるが、その具体的な値は用途によって決められる。KAGRA懸架系のシステムには、IPやGASフィルタに使用される標準的なLVDTとBFに使用される専用のLVDTの2種類があり、後者についてはLVDTの2次コイルをアクチュエータコイルと共用する設計である。

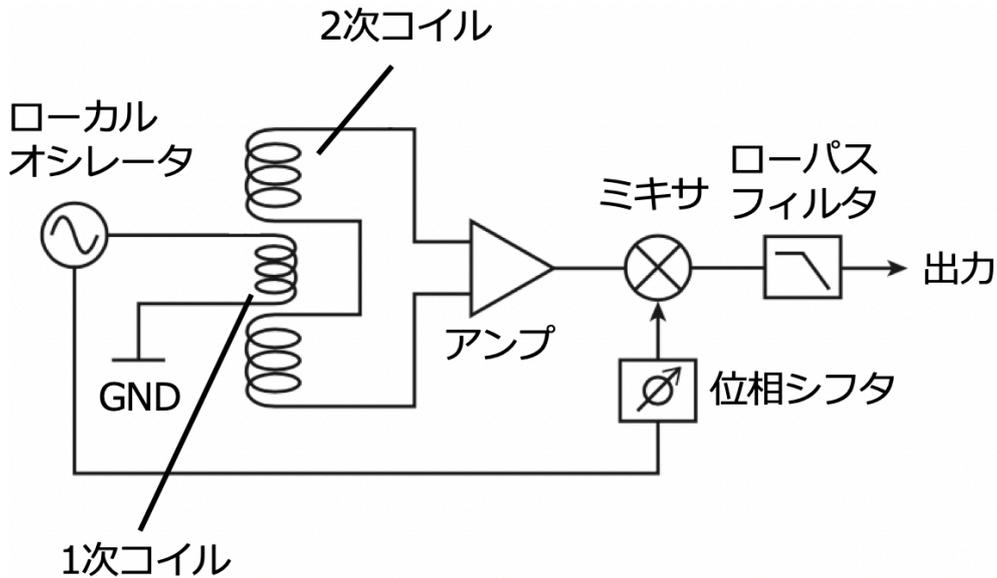


図 4.4 LVDT の概要図

4.1.2.2 Geophone

Geophoneは慣性系に対する速度を測定する装置であり、LVDTと同様IPの動きをモニターする。2種類のセンサを用いているのは、感度が良い帯域が両者で異なるからである。具体的には、GeophoneはLVDTに比べ高い周波数で感度が良い。そのため、クロスオーバー周波数（両者のゲインの大小が入れ替わる周波数）が約0.1 HzとなるようにLVDTの信号にローパスフィルタを、Geophoneの信号にハイパスフィルタをかけてIPの制御を行っている。図4.5はその制御の様子を示したものである。LVDTのみによる制御（赤）では共振が抑えられているものの、0.3 Hz以上でノイズが見られる。Geophoneを合わせることで、そのノイズの影響が抑えられている（水色）。

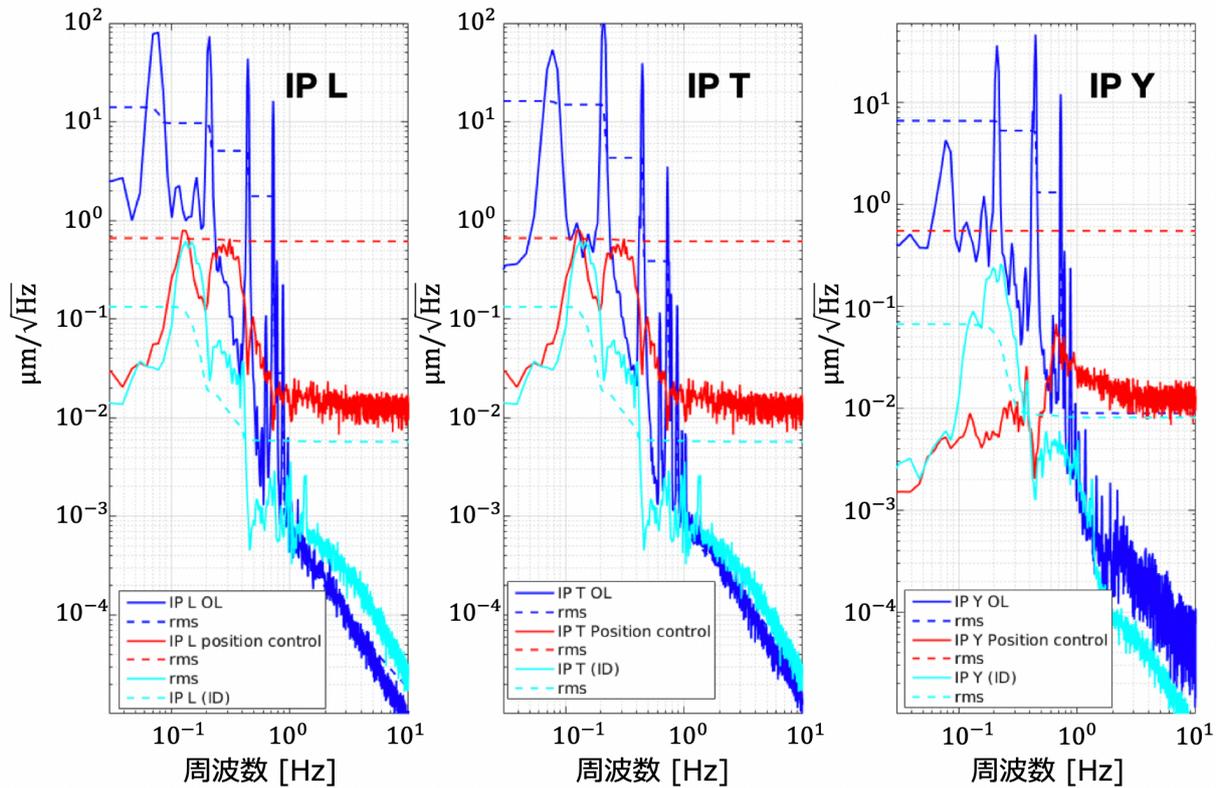


図 4.5 LVDT と Geophone による IP の制御 [41]. 赤線は LVDT のみによる制御を示しており、共振は抑えられているものの、0.3 Hz 以上でノイズが見られる。これに Geophone を合わせた制御が水色であり、ノイズの影響が抑えられているのが分かる。

KAGRA では Sercel 社製の L-4C を用いている。これはプルーファスの筐体に対する速度に比例して電圧を出力するが、その動作原理は次の通りである。

約 1 kg のプルーファスはバネおよび damper で吊り下げられており、コイルが巻き付けられている（共振周波数は 1 Hz）。そしてこのコイルが筐体に取り付けられた永久磁石による誘導電圧を発生させる。Geophone は特定の光や電波等の補助を必要としない受動計測装置であり、内部発振器の制御を必要としないため設置やメンテナンスが容易である。

generator 定数 G_e 、減衰係数 η 、角周波数 ω および角共振周波数 ω_0 を用いると Geophone の周波数応答は

$$H_{\text{geo}}(\omega) = \frac{G_e \omega^2}{\omega_0^2 + 2i\eta\omega_0\omega - \omega^2}. \quad (4.1)$$

これより Geophone は共振周波数 1 Hz 以上では平坦な応答を示すが、それ以下の周波数では f^2 に比例した周波数依存性を示すことが分かる（図 4.6）。また、各パラメタの典型的な値については表 4.2 の通りである。なお、これらのパラメタは、複数種類の地震計による同時測定によって校正される。特に、KAGRA では地下施設の環境地震モニターとして Nanometrics 社の Trillium Compact を 2 台、Trillium 120QA を 1 台使用している。これらは広帯域（0.01~10 Hz）でフラットな応答特性を持つため、校正が簡単である。

Geophone からの出力電圧は信号対雑音比を良くするために前置増幅器回路（プリアンプ）で増幅され、制御システムに送られる。このとき、雑音電圧が少ないオペアンプ CS3002 を用いた第 1 増幅段階で信号を 374.5 倍に拡大し、第 2 増幅段階で 2.5 倍に増幅する。よって、前置増幅器は合計約 940 倍の増幅を行うことになる。なお、KAGRA では Virgo 用に Nikef で設計された前置増幅器回路を用いている。

一方、前置増幅器は Geophone の感度を制限するノイズを生む。雑音電圧の測定結果より、高周波（0.3 Hz 以上）ではジョンソンノイズ（抵抗からの熱雑音）、低周波（0.3 Hz 未満）では電流雑音（オペアンプ

からのノイズ)からの寄与があることが分かっている [38].

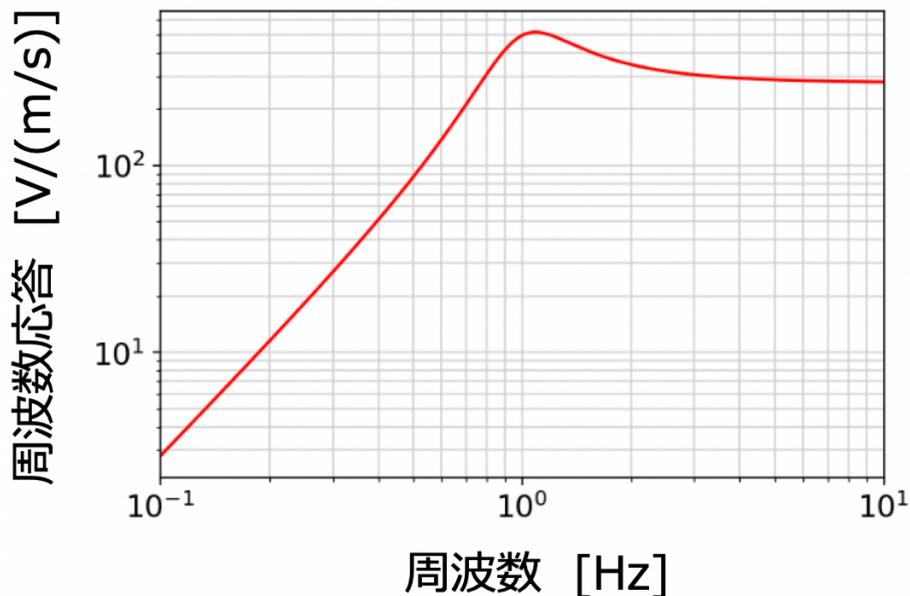


図 4.6 Geophone の周波数応答 (フレーム速度から出力電圧への変換効率)

generator constant	276.8 V/(m/s)
プルーフマスの重量	1 kg
共振周波数	1 Hz
減衰定数	0.28
コイルの抵抗	5500 Ω

表 4.2 Geophone (L-4C) の各パラメタ (典型的な値)

また, Geophone と前置増幅器は大気中で動作させる必要があるが, 懸架系全体は真空中にある. そこで, Geophone の真空適合性を確保するため, ステンレス製の真空ポッドに Geophone を封入して内部を大気圧に保った. なお, 真空ポッドからの空気漏れが数ヶ月のスケールで無視できることは, [?] で示されている. また, 真空ポッド内のジオフォンの相対位置は, 読出信号に不要なインパルスが発生させる内壁のガタつきを防ぐため, ゴムリングで固定されている. このゴムリングの減衰効果は無視できるほど小さく, Geophone と真空ポッドの筐体は一体であると思なすことができる.

4.1.2.3 Folded Pendulum 加速度計

LVDT と Geophone を組み合わせて IP の制御を行うと述べたが, 図 4.5 を見ると 0.1 Hz あたりでの振動減衰は, IP のセンサへの要求値 (0.1 Hz において $10^{-7.8} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$) に対して不十分である. これは Geophone が低周波における感度が悪いため, クロスオーバー周波数を 0.19 Hz までしか下げられなかったことによる.

そこで, ノイズが要求に対して十分小さいことが先行研究 [42] によって示された FP (Folded Pendulum) 加速度計をインストールした. FP 加速度計ではプルーフマスの一端を正立振り子で吊るし, もう一端を倒立振り子で支えている. 図 4.7 は FP 加速度計の概念図であり, このモデルでは質量 M_1 , 長さ L_1 の正立振

り子と質量 M_2 , 長さ L_2 の倒立振り子が質量のない剛体梁で接続されている。この系の共振周波数は

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{M_1}{L_1} - \frac{M_2}{L_2}\right) \frac{g}{M_1 + M_2} + \gamma}. \quad (4.2)$$

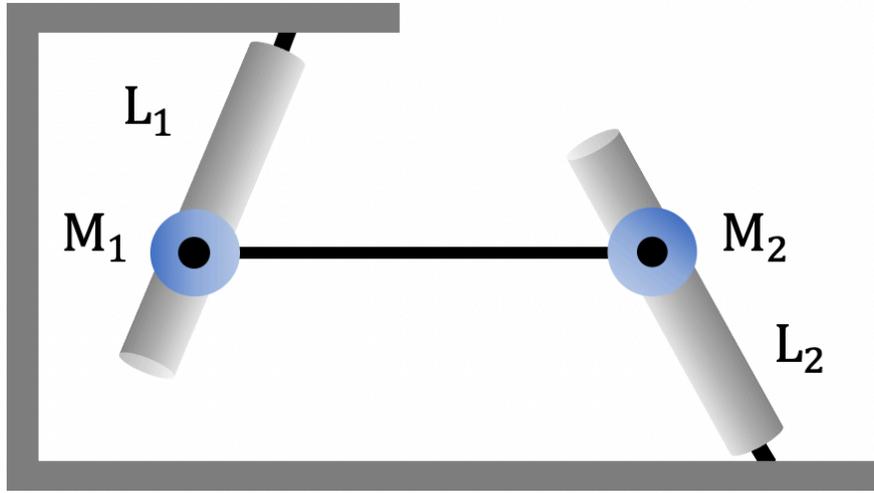


図 4.7 FP 加速度計の概念図

で与えられる (γ はフレックスジョイントの剛性による影響を表す)[43]. この共振周波数は, 2 本のアームに対する重心位置を調節することで任意に下げることができる.

KAGRA で用いる FP 加速度計は幅 140 mm, 高さ 134 mm, 奥行き 40 mm の大きさであり, IP の上にインストールすることができる. また, 真空中でも問題なく動作することも示されている [42].

4.1.2.4 コイルマグネットアクチュエータ

KAGRA のような重力波検出器では懸架された物体に力を加えるため, 真空中で使える非接触のアクチュエータが必要になる. そこで永久双極子磁石とソレノイドコイルからなるコイルマグネットアクチュエータを用いる. これは永久磁石の静磁場とコイルに流れる電流の相互作用で発生する電磁気の力を利用したものであり, 十分な線形領域と作動力のダイナミックレンジを持つように設計されている. また, KAGRA の懸架系におけるコイルマグネットアクチュエータにはボイスコイル型と同軸可動磁石型の 2 種類があり [44], IP と GAS には前者が, BF と低温懸架系には後者が用いられている.

ボイスコイル型のアクチュエータは, 静磁場中を移動することでコイル内の電流がローレンツ力を受けるという作動原理である. 基準フレームに固定されている永久磁石 (高透磁率の鉄製ヨークで成形されたもの) による一様な磁界の中にコイルのリード線が置かれ, ローレンツ力がコイル自身の作動力となる.

一方, 同軸可動磁石型のアクチュエータは永久磁石とソレノイドコイルが同軸に配置されており, 基準フレームに取り付けられたコイルの誘導磁界によって磁石に電磁力が加わる. 作動力の磁石の位置に対する依存性を軽減するために, 磁石はコイルの誘導磁界が十分均一である領域に配置されている.

これらのアクチュエータでは常に最大作動力と雑音とのトレードオフがある. 大きな作動力を持つアクチュエータは, わずかな電气的変動でも雑音を生む. 特に防振懸架系の場合, 鏡に近いアクチュエータほど干渉計の感度に大きな影響を与える. そこで, KAGRA では作動力とノイズの要件に応じて, 電流源と出力抵抗のオペアンプが異なる 3 種類のコイルドライバを使用している. Tower で用いられているものは表 4.3 に示した通りである.

場所	コイルドライバ	オペアンプ	出力抵抗	最大電流
IP・GAS・BF	ハイパワー	OPA548	80 Ω	0.12 A

表 4.3 Tower で用いられているコイルドライバ. コイルのインピーダンスは出力抵抗には含まれていない.

4.2 低温懸架装置 (Cryogenic Payload)

4.2.1 機構

BF 以下は低温懸架系 (Cryogenic Payload) と呼ばれ, プラットフォーム (PF) から始まる. PF からはテストマス (TM) チェーンとリコイルマス (RM) チェーンの 2 つの 3 段振り子が並列に吊り下げられている. TM チェーンには上から順にマリオネット (MN), 中間マス (IM), テストマス (TM) という 3 つのステージがあり, RM チェーンは TM チェーンの対応するマスを取り囲むようなステージで, 地面の擾乱から隔離された作動力を加えることができる.

4.2.1.1 PF

PF は低温懸架系の最上段にある円盤状のステージで, 長さ 3.3 m のマルエージングワイヤで Tower 部分 (BF) と繋がっている (図 4.8 左). PF には約 4 Hz の共振周波数を持つベリリウム銅製の板バネが 3 枚取り付けられており, V 方向の防振を行う. なお, TM チェーンはこの 3 枚の板バネが交わる点から吊るされている. また, PF からは RM チェーンが TM チェーンに並列に懸架されており, その回転を行うためのムービングマスがインストールされている (図 4.8 右).

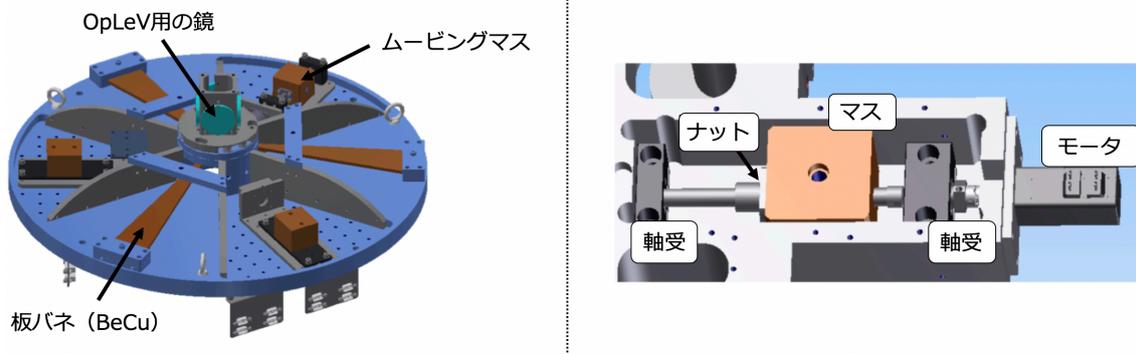


図 4.8 プラットフォーム (PF) とボールネジ型ムービングマス (ボールネジを用いてマスを動かす機構を持つ. ボールネジのナットがマスについているため, ネジの軸がモータによって回転するとマスがナットと共に動く.) [45]

4.2.1.2 MN

マリオネット (MN) は TM チェーン初段の十字型ステージ (図 4.9 左) であり, 回転自由度の剛性を低くするために質量中心に近い箇所を 1 本のマルエージングワイヤで支持している. 干渉計の腕に沿った方向の MN の腕にはロープウェイ型ムービングマス (図 4.9 右) が取り付けられており, MN の重心を変えることで TM の P 方向の傾きを調節できる. なお, ボールネジ型のものを使用しないのは極低温において熱収縮によるスタックなど, ボールネジに起因する不具合が生じたからである [45]. また, MN の下部には OpLeV 用の鏡があり, 外部からレーザーを当てることで, 地面に対する MN の角度をモニターすることが

できる (4.2.2.1 節および補遺 B 参照)

一方、マリオネットリコイルマス (MNR) は MN を囲むように取り付けられている (相対距離の初期値 : 20 mm) . これは先述の通り 3 本のワイヤで懸架されているため、1 本のワイヤで吊られた MN に比べて Y 方向に揺れにくい。そこで MNR に設置されたフォトセンサによって MN との相対位置を測定し、その信号をコイルマグネットアクチュエータ (MN に磁石・MNR にコイルがつけられている) にフィードバックすることによってダンピング制御を行っている (4.2.2.2 節および第 6 章参照) .

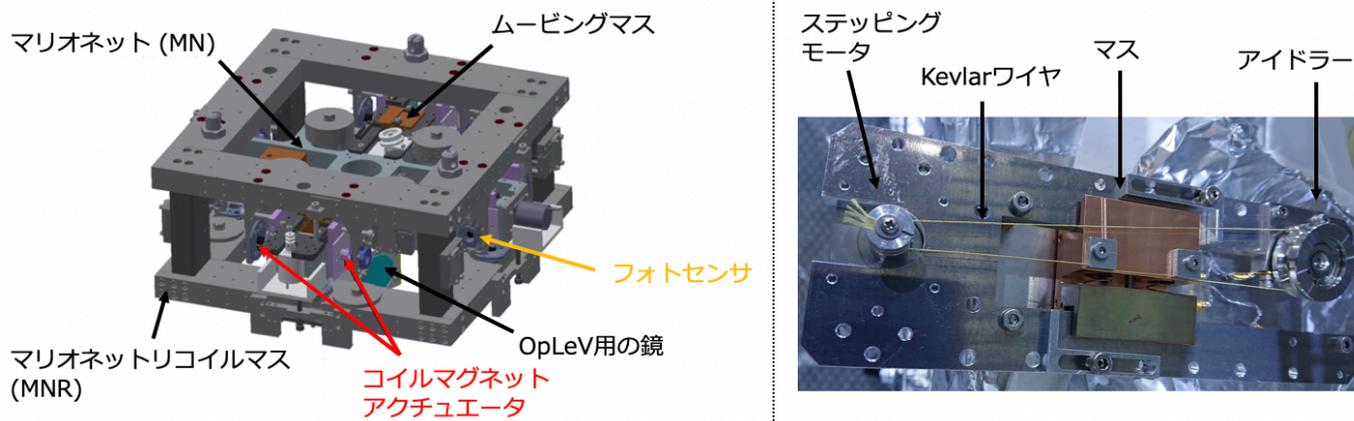


図 4.9 マリオネット (MN) とマリオネットリコイルマス (MNR) , およびロープウェイ型ムービングマス (マス・Kevlar ワイヤ・ステッピングモータ・アイドラーで構成されており、ワイヤとモータでマスを引っ張ることで MN の重心を変えている) [45]

4.2.1.3 IM

中間マス (IM) は MN からベリリウム銅製のワイヤ 4 本で吊られている (図 4.10) . IM にはサファイアブレード (サファイアファイバーを懸架するサファイア製の板バネで、ファイバーの縦方向の共振周波数を下げるほか、長さのばらつきを補正する役割を持つ。) が取り付けられており、ミラーの V 方向の防振を行っている。

中間リコイルマス (IRM) は MNR と同様、IM を囲むように取り付けられている (相対距離の初期値 : 20 mm) . フォトセンサやコイルマグネットアクチュエータについても MNR と同様で、MN 段で制御できない固有モードも制御している。

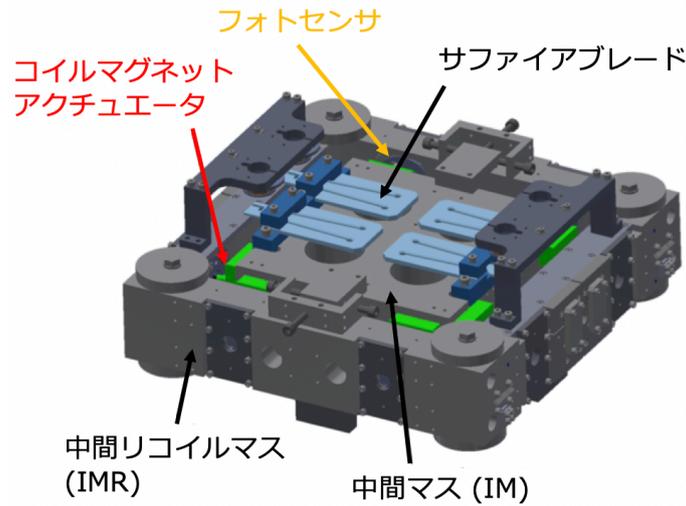


図 4.10 中間マス (IM) と中間リコイルマス (IRM)

4.2.1.4 TM

テストマス (TM) はサファイア鏡 (直径 220 mm・厚さ 150 mm・質量 23 kg の円筒形) であり, 低温懸架系の最下段に位置する (図 4.11). この鏡は低い熱雑音と高い熱伝導率を持ち, レーザー波長での高反射率, 低吸収率を実現させるため誘電体多層膜コーティングを施されている. しかし TM には常にレーザーが照射されることで熱を吸収し, 温度が上がってしまうので熱雑音が大きくなる. そこで直径 1.6 mm のサファイアファイバー (TM の基材と同じ材料) 4 本で懸架し, 熱伝導率を向上させている. なお, ファイバーを引っ掛けるために TM の側面 2 箇所にはフラットカットを入れ, スリットが入ったイヤードと呼ばれるプリズムが HCB (Hydroxide Catalysis Bonding [46]) で取り付けられている. また, TM にも MN と同様 OpLev が用いられているが, 地面に対する角度をモニターする Angle-sensing OpLev に加えて, 鏡の光軸方向の揺れを見るための Length-sensing OpLev も設置されている.

リコイルマス (RM) については MN や IM と同じく, TM を覆うように吊られており, TM・RM 間のコイルマグネットアクチュエータで 3 自由度 (L, P, Y) を制御している.

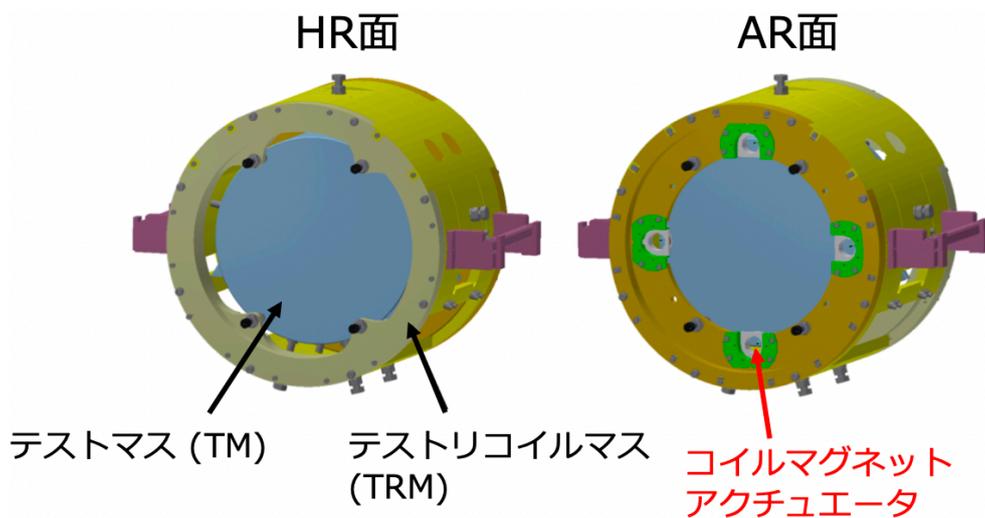


図 4.11 テストマス (TM) とそのリコイルマス (RM)

4.2.2 センサ・アクチュエータ

上述の通り低温懸架系の制御にはセンサとアクチュエータを用いる。MN と IM に関しては各自由度についてそれぞれフォトセンサでリコイルマスとの相対変位を測定できるようになっており、また、地面に対する角度の測定は MN と TM に取り付けられた光てこを用いている。また、このアクチュエータで制御できる方向は図 4.12 に示した通りで、MN・IM に関しては 6 自由度、鏡に関しては L, P, Y の 3 自由度になっている。以下ではそれぞれのセンサおよびアクチュエータについて簡単に記述する。

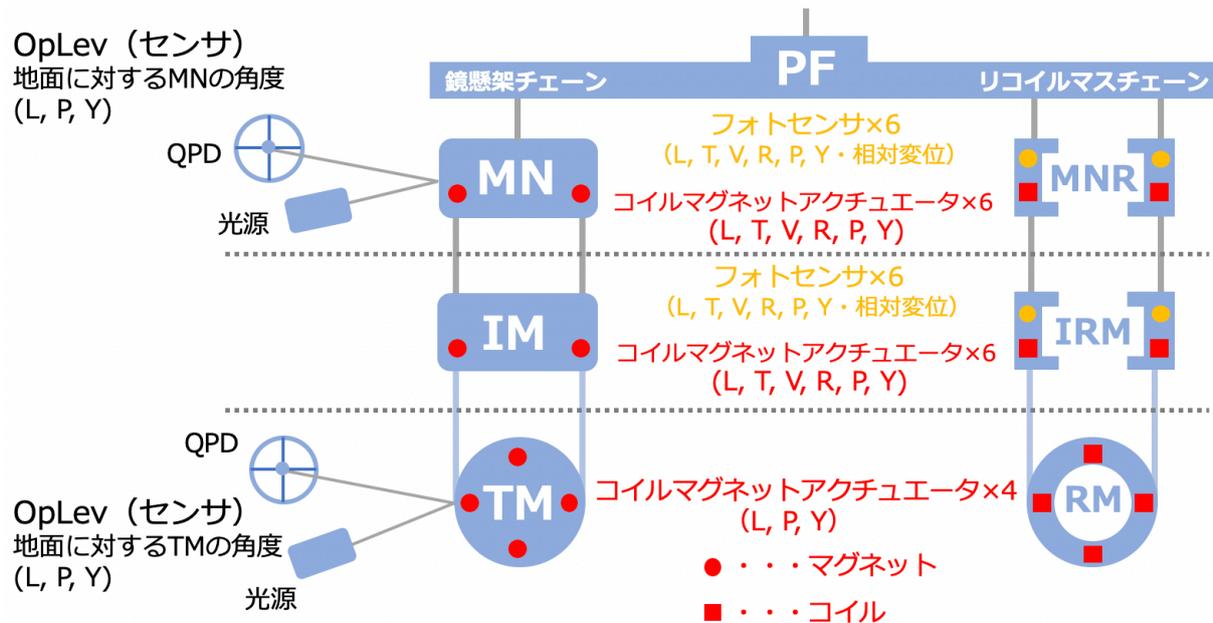


図 4.12 Payload に関係のあるセンサ・アクチュエータ

4.2.2.1 OpLev

OpLev は鏡にレーザーを当てて、その反射光のビームスポットの位置を検知し、鏡の地面に対する角度（水平）変位をモニターするものである。低温懸架系では MN に Angle sensing（角度方向の揺れを見る）、TM に Angle sensing および Length sensing（水平方向の揺れを見る）OpLev を設置している。それらの原理については補遺 B 参照。また、反射光の検知は QPD (Quadrant PhotoDiode) で行っている。

4.2.2.2 フォトセンサ

センサには接触型のものと非接触型のものがある。接触型センサは変位を高精度で読み取ることができるが、センサの振動がターゲットを揺らしてしまうので、KAGRA の懸架系に用いるのは不適切である。それに対し、光や超音波を用いる非接触型センサは外乱を与える心配がない。

そこで重力波検出器では非接触型のセンサを用いている。その中でも、鏡を極低温まで冷却する KAGRA では、反射型のフォトセンサを用いている。これは反射型のフォトセンサがシャドーセンサ¹などに比べてダイナミックレンジが広く、冷却した際の熱収縮等でセンサが使えなくなる心配が少ないからである。

反射型フォトセンサは LED および 2 つの PD から構成される。KAGRA では LED・PD を選定するた

¹ マスの運動に伴ってフラッグが PD に入る光を遮る方向に動き、光量の変化を変位として検出するセンサ。ダイナミックレンジが数 mm と小さいので冷却した際にフラッグがセンサに衝突して使用不可になる恐れがある。

めの研究 [47] を行い, Thorlabs 社の InGaAs 素子 LED1200E[48] を LED, InGaAsP 製の FGA21[49] を PD として採用した. これはエネルギーバンドギャップの小さな InGaAs ではエネルギーを媒介するキャリアとしてフォノンを使わない²ので, 冷却した際も十分に動作できるからである.

また, 反射型フォトセンサの動作原理は以下の通りである. LED と PD は共にセンサに取り付けられており, LED から出た光がターゲットで反射し, PD で検知される. このとき, 光軸方向のターゲット位置の変化に伴って反射光量も変化するので, そこからセンサ (リコイルマスチェーン側) とターゲット (鏡懸架チェーン側) の相対距離を割り出している (図 4.13 右) .

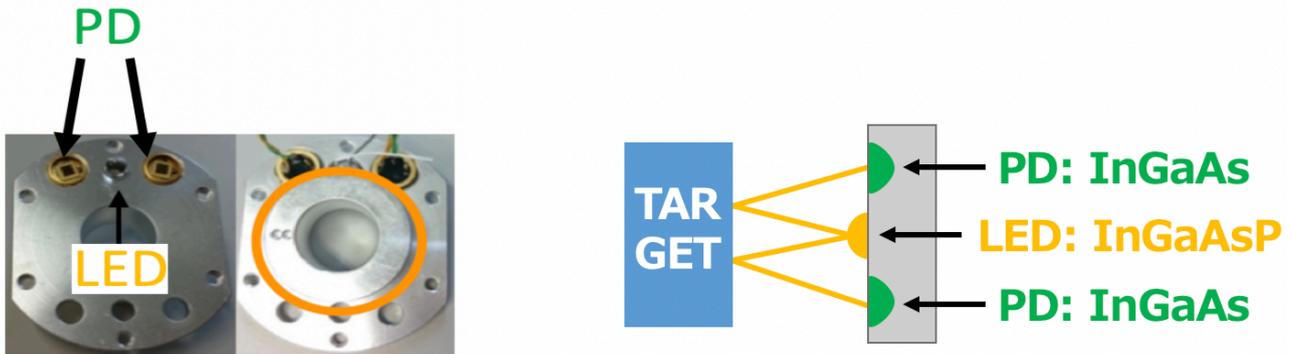


図 4.13 実際にインストールされている反射型フォトセンサ (左) [50] とその動作原理 (右)

4.2.2.3 コイルマグネットアクチュエータ

低温懸架系で用いられるコイルマグネットアクチュエータは 4.1.2.4 に示した通り, 同軸可動磁石型のものである. また, 低温懸架系の場合, 磁石が TM チェーンに, コイルが RM チェーンに取り付けられている. なお, 低温にしたときの特性の変化とバルクハウゼンノイズが小さいという理由でマグネットには SmCo (サマリウムコバルト) を用いている.

コイルドライバについては, 作動力とノイズのトレードオフを考慮し, MN・IM と TM で異なるものを使用している (表 4.4) .

場所	コイルドライバ	オペアンプ	出力抵抗	最大電流
MN	ローパワー	AD8671	1.4 k Ω	9.5 mA
IM	ローパワー	AD8671	1.4 k Ω	9.5 mA
TM	ローパワー	AD8671	7.8 k Ω	1.3 mA

表 4.4 低温懸架系で用いられているコイルドライバ [51]. コイルのインピーダンスは出力抵抗には含まれていない.

4.2.3 冷却システム

低温懸架系は, 8 K inner シールドと 80 K outer シールド³からなる二重構造のクライオスタットの中で, 4 つの超低振動 PTC (Pulse-Tube Cryocooler : パルス管冷凍機) を用いて冷却される (図 4.14) . この PTC には 2 つの低温ステージ (それぞれ約 40 K と約 4 K に冷却する) があり, それぞれが VR (Vibration

² フォノンは低温で励起しづらい. Si などはエネルギーを運ぶキャリアがフォノンなので低温光学の分野では用いられない.

³ どちらもアルミニウム (Al1070) 製で合わせて 1400 kg ある. また, 放射冷却をさらに向上させるため, inner シールドには DLC (Diamond Like Coating) が施されている.

Reduction : 振動減衰) ステージに熱的に接触している. また, PTC-1, 2, 3, 4 の 1 段目は outer シールドに, PTC-2 と 4 の 2 段目は inner シールドに接続されている [52].

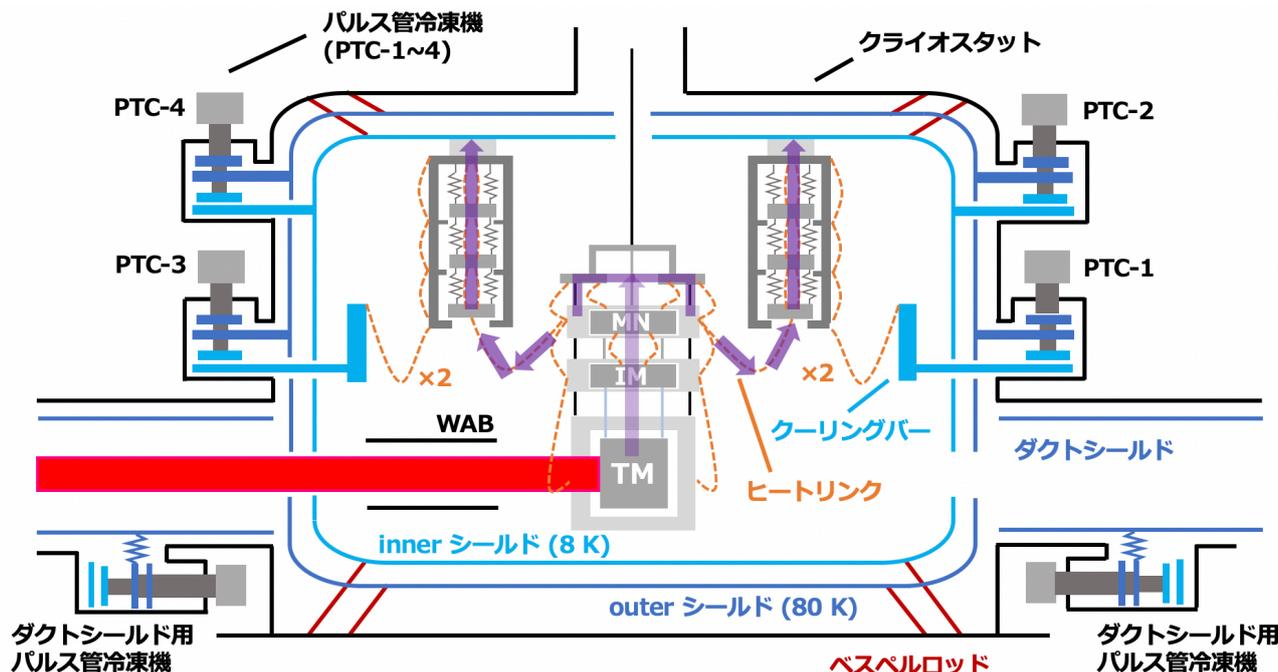


図 4.14 低温懸架系の冷却システム. 低温懸架系は二重放射シールドを持つクライオスタット内で冷却される. 1 番外側の黒が逆真空容器, 内側の青は 80K と 8K の放射線シールドを示している. 80K シールドは PTC-1,2,3,4 の 1 段目で冷却され, 8K シールドは PTC-2 と 4 の 2 段目で冷却される. PTC-1 と 3 の 2 段目はクーリングバーに接続され, 6N Al 製のヒートリンクを通して低温懸架系を冷却する. また, クライオスタットの左右にあるダクトシールドは, 1 段の PTC で 120K まで冷却される.

低温懸架装置の冷却における熱伝達経路は放射冷却と伝導冷却の 2 つに分けられる. まず放射冷却について, 先に示した二重の放射シールドは八角柱の構造で, 300 K の外部放射から低温懸架装置を隔離して冷却する. このシールドからの熱放射により, 低温懸架装置は約 100 K まで効果的に冷却される. また, レーザーの光路を作るシールドの両脇の穴も熱放射源となる. この穴からの 300 K の放射を最小限にするため, 左右に 5 m のダクトシールドが設置されており, それぞれのダクトシールドはダクトシールド用の PTC の 1 段目によって 120 K まで冷却される [52].

次に伝導冷却について, Payload の各ステージはヒートリンクと呼ばれる 6N (6 Nine, すなわち 99.9999%) の Al のケーブルで接続され, 伝導冷却が行われる [53]. TM に吸収された熱は上段へ流れ, 最終的にヒートリンクと Al クーリングバーを通してクライオスタットへ抽出するという仕組みである. この機械的伝導経路は, 各ステージにさらなる振動を引き起こす可能性があるため, MNR に取り付けられたヒートリンクを中継する 3 段の防振系がクライオスタットに実装されている. この伝導冷却によって, TM の温度を 20K まで下げることができる.

第 5 章以降ではこの Type-A Suspension の内, 特に低温懸架系の特性評価および制御について記述する.

第 5 章

低温懸架装置の特性評価

この章では低温にした際、懸架装置の特性がどのように変化するかということについて述べる。

5.1 特性評価の目的

第 1 章で述べた通り KAGRA では鏡を極低温に冷却するが、これは 2023 年現在運転中の他の重力波検出器にはない大きな特徴である。しかし、低温にすると鏡や懸架ワイヤなどの物性が変化することで共振周波数や伝達関数も変化する。すると、それに伴いかけるべき制御も変更する必要があることがある。そこで低温にした際、ローカル制御に用いるフォトセンサの出力や懸架装置の伝達関数、Q 値が室温と比較してどのように変化したかを調べた。

なお、ETMY, ITMX, ITMY は 2022 年 1 月現在 250 K ほどまでしか冷却されていないため、ETMX についてのみ、特性評価を行った。

また、ETMX の MN の温度変化は図 5.1 の通りであり、277 K から 82 K まで冷却された状態で特性評価を行った。

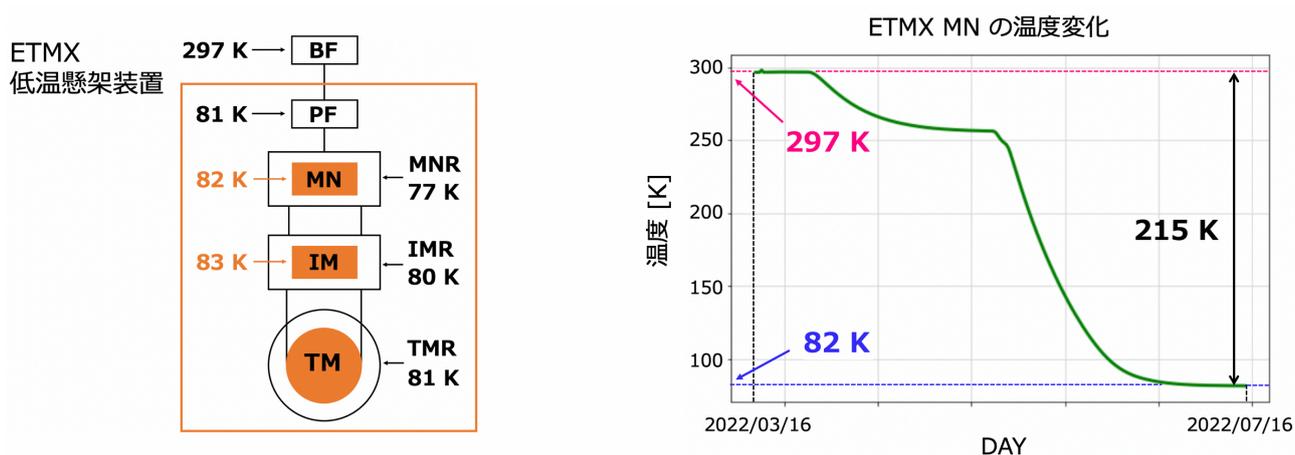


図 5.1 ETMX の低温懸架装置の温度（左）と ETMX MN の温度変化（右）

5.2 室温と低温下での特性の比較

5.2.1 フォトセンサの出力

第4章で述べたように、反射型のフォトセンサを用いて MN, IM 段とそれぞれのリコイルマスとの距離を測定し、その信号を用いてローカルな制御を行っている。ここではフォトセンサの出力が室温から低温への変化でどのように変化するか調べた。

5.2.1.1 測定結果

MN, IM 段で用いられるフォトセンサの出力を室温と低温下で比較したところ、図 5.2, 5.3 のようになった。これらの図では室温 (297 K) での出力を 1 とし、他の温度ではそれに対して何倍の出力があるかというを示した。

これより、低温にするとフォトセンサの出力が増加するのが分かる。これは、低温にすると小さな変化をより大きく見られることを示しており、またインストール前に [50] で測定された結果と一致している。

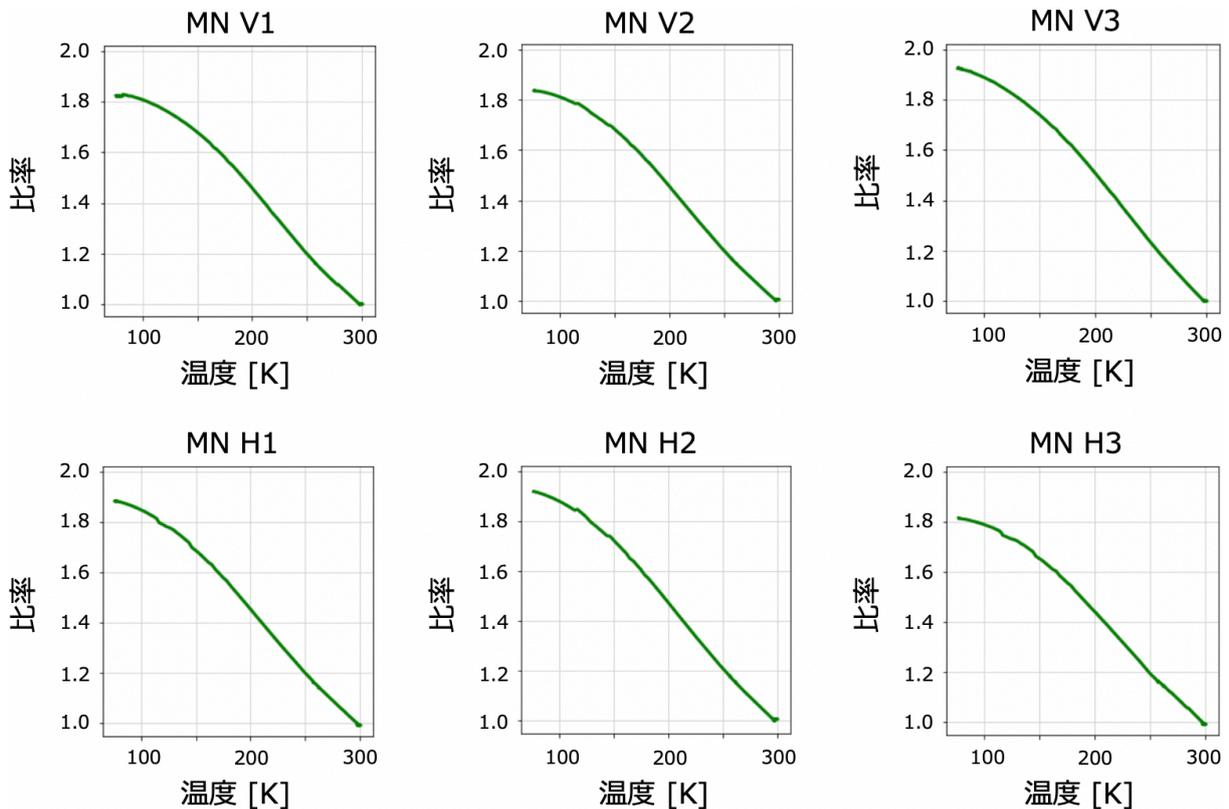


図 5.2 フォトセンサの出力 (ETMX MN) の変化

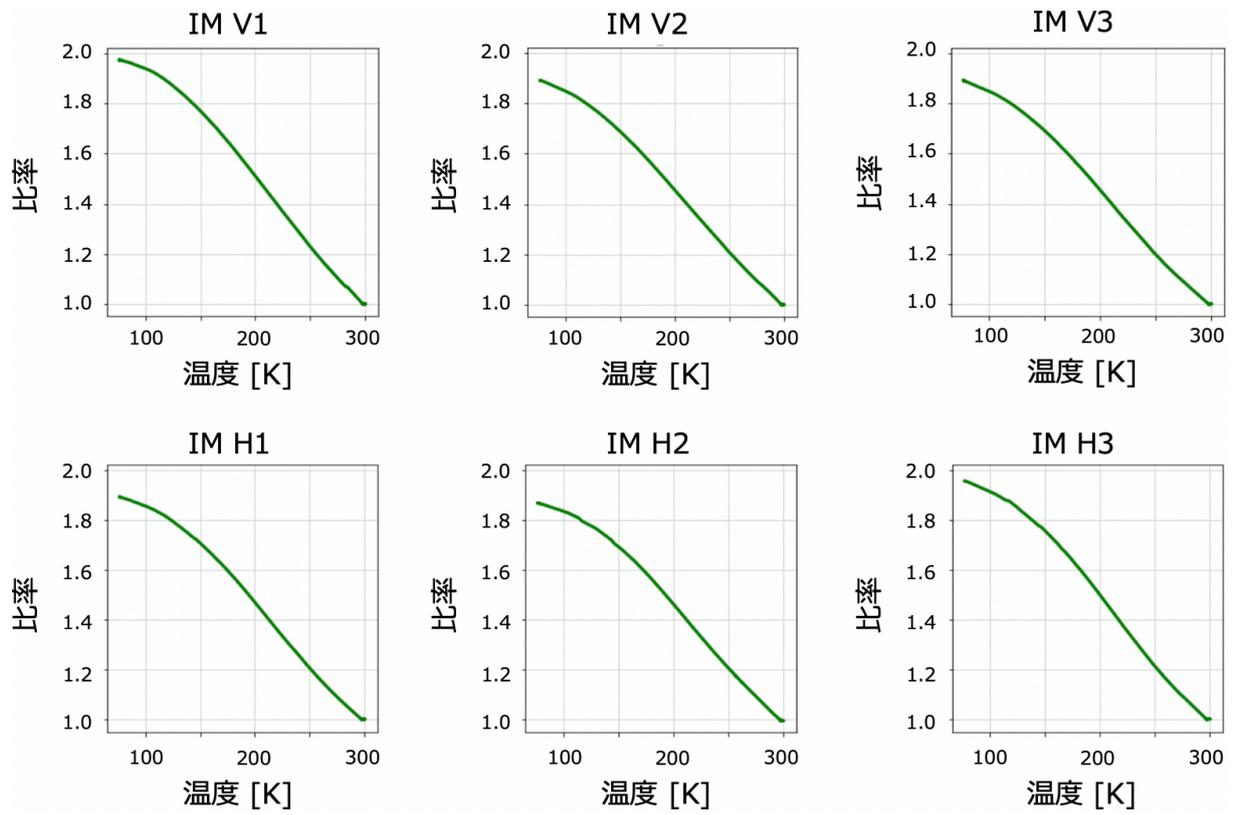


図 5.3 フォトセンサの出力 (ETMX MN) の変化

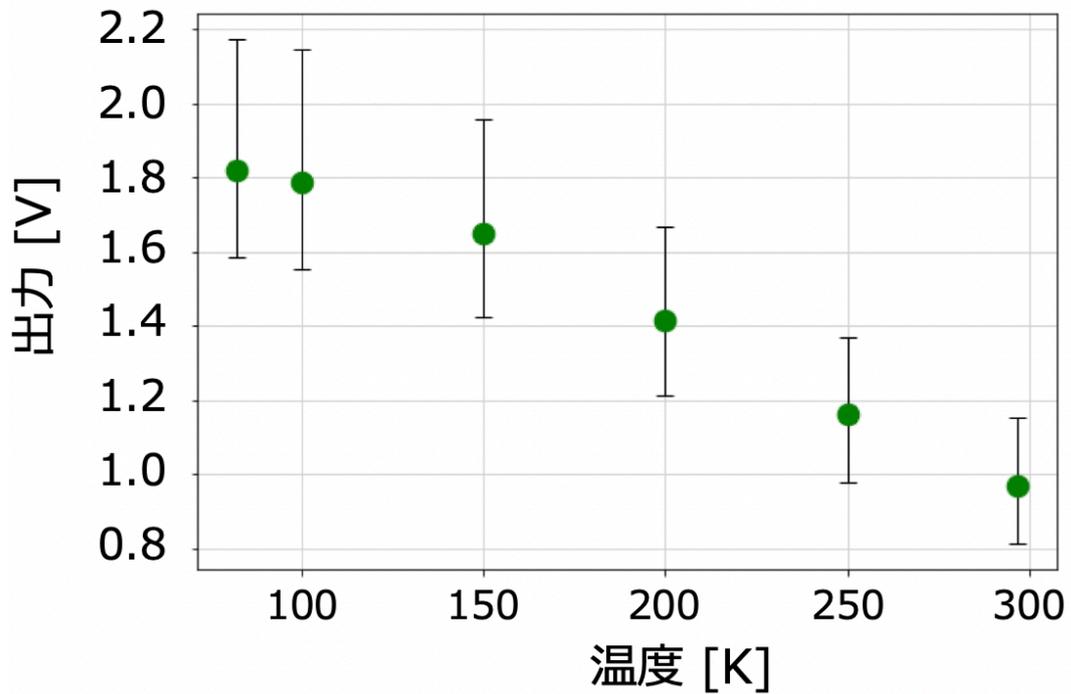


図 5.4 温度ごとのフォトセンサの出力の平均. エラーバーはそれぞれ出力の最小値, 最大値を表している.

温度	平均値	標準偏差	最大最小の差
297 K	0.9662 V	0.1021 V	0.3389 V
250 K	1.163 V	0.1219 V	0.3907 V
200 K	1.414 V	0.1494 V	0.4559 V
150 K	1.648 V	0.1775 V	0.5310 V
100 K	1.789 V	0.1906 V	0.5904 V
82 K	1.822 V	0.2044 V	0.5915 V

表 5.1 フォトセンサの出力の平均値およびばらつき

また、図 5.4 に示したのは各温度における 12 個のフォトセンサの出力の平均である。なお、エラーバーはそれぞれ出力の最小値、最大値を表している。さらに、各温度における出力の平均値および標準偏差は表 5.1 の通りであり、これらより低温にすると出力のばらつきが大きくなるのが分かる。

5.2.1.2 考察

[50] によると、センサの個体差が 50% 以下であるという要求がある。これはキャリブレーションファクターの大きさが 50% 以上変化すると、センサとターゲットの距離が ± 1 cm という線形応答範囲にあるかどうか分からなくなるからである。本研究において、実際に KAGRA ヘインストールして冷却された状態で出力のばらつきを測定した結果、センサの個体差は 82 K においても平均値に対して 32% であり、50% 以下という要求を満たすことが分かった。しかし、低温にすると出力のばらつきは大きくなっており、冷却が進むにつれてセンサの個体差がさらに広がる恐れがある。したがって、今後さらに冷却する場合、フォトセンサの出力のばらつきに注意する必要がある。

補遺 C に示したように、反射型フォトセンサの出力は LED のビームプロファイルに大きく影響を受ける。よってフォトセンサの出力のばらつきの原因として LED のビームプロファイルの違いが挙げられる。しかし、低温でそのばらつきが大きくなる理由は説明できない。KAGRA の反射型フォトセンサに用いられる LED の発光効率の個体差および温度との関係については、今後調査する必要がある。

5.2.2 共振周波数・伝達関数

5.2.2.1 測定結果

MN 段の各自由度方向 (L, P, Y) に励起信号を入れて振動させ、フォトセンサの出力で読み取った MN 段の各方向の動きまでの伝達関数を測定した。その結果を図 5.5, 5.6, 5.7 に示す。これらより、低温にすると共振周波数が数 % 高くなっているのが分かる。

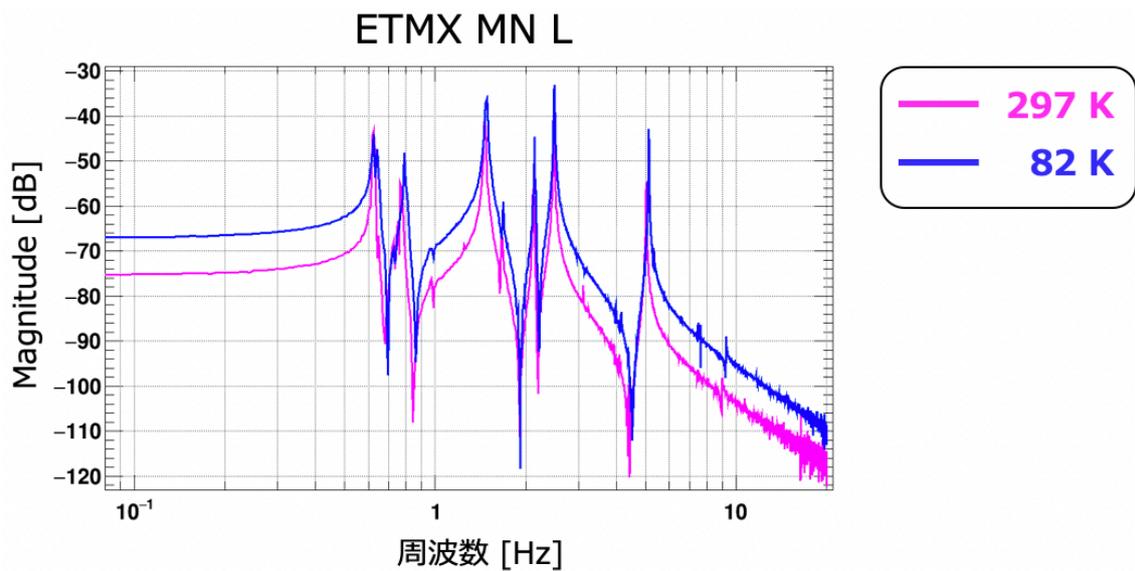


図 5.5 室温と低温での伝達関数の比較 (ETMX の MN の L) . ピンク, 青の線がそれぞれ室温 (297 K) , 低温 (82 K) における伝達関数を示している.

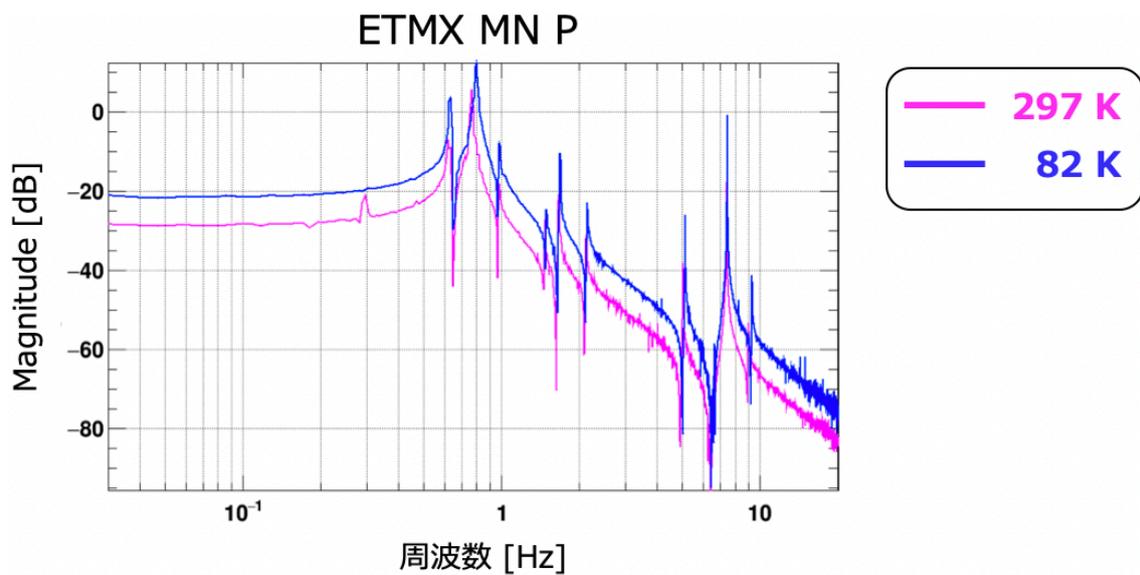


図 5.6 室温と低温での伝達関数の比較 (ETMX の MN の P) . ピンク, 青の線がそれぞれ室温 (297 K) , 低温 (82 K) における伝達関数を示している.

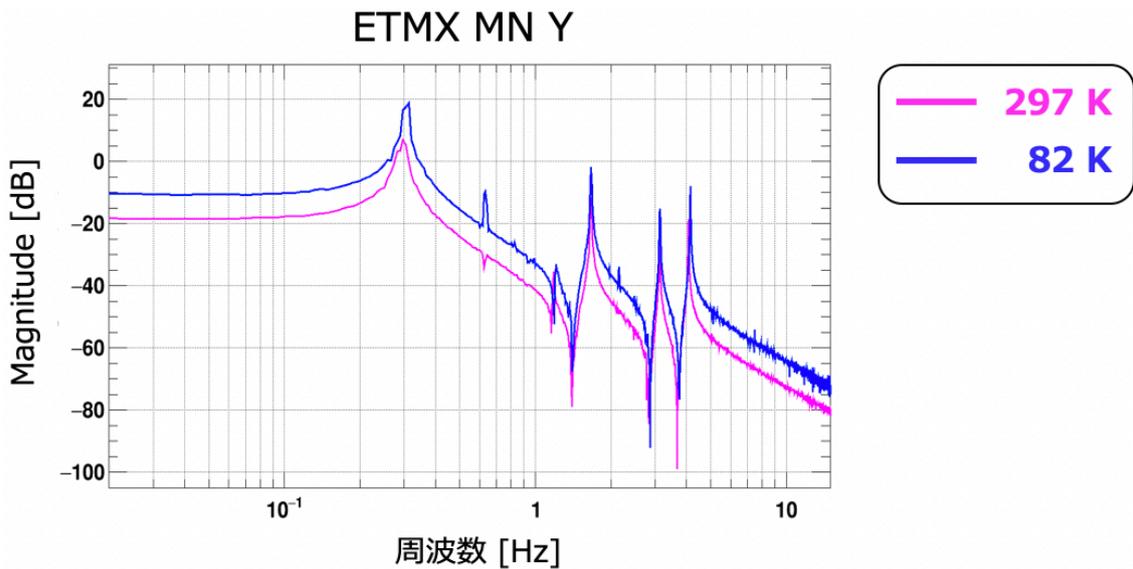


図 5.7 室温と低温での伝達関数の比較 (ETMX の MN の Y) . ピンク, 青の線がそれぞれ室温 (297 K) , 低温 (82 K) における伝達関数を示している.

Mode \ 温度	1	2	3	4
297 K	0.63 Hz	1.46 Hz	2.12 Hz	2.47 Hz
82 K	0.63 Hz	1.48 Hz	2.13 Hz	2.48 Hz

表 5.2 共振周波数 (ETMX MN L)

Mode \ 温度	1	2
297 K	0.76 Hz	7.42 Hz
82 K	0.80 Hz	7.46 Hz

表 5.3 共振周波数 (ETMX MN P)

Mode \ 温度	1	2	3	4
297 K	0.29 Hz	1.66 Hz	3.13 Hz	4.08 Hz
82 K	0.31 Hz	1.67 Hz	3.14 Hz	4.16 Hz

表 5.4 共振周波数 (ETMX MN Y)

5.2.2.2 考察

一般に、低温にするとヤング率が上昇することで共振周波数が増加すると考えられ、予想通りの結果が得られたといえる。

また、励起信号から MN の動きまでの伝達関数のゲインが上がっているが、これはフォトセンサの出力が増加したことによる。フォトセンサの出力を各方向の変異に換算しているが、冷却に伴いセンサの出力が増加した分を校正していないため伝達関数のゲインが上がっているのである。

5.2.3 機械的 Q 値

5.2.3.1 測定方法

Q 値は伝達関数から求めることができる。例えば減衰を含む調和振動子の運動方程式は

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = f(t), \quad (5.1)$$

と書けるが、これを Fourier 変換した上で散逸を表す項 $\phi(\omega)$ を付け加えると

$$-m\omega^2 \tilde{x} + m\omega_0^2 [1 + i\phi(\omega)] \tilde{x} = \tilde{f}, \quad (5.2)$$

となる。なお、この $\phi(\omega)$ を用いると位置および復元力は周波数領域において

$$\tilde{F} = -m\omega_0^2 [1 + i\phi(\omega)] \tilde{x}, \quad (5.3)$$

と書ける。つまり、復元力の位相は位置の位相に対して ϕ 遅れる。ここで、復元力が 1 周期の間にする仕事（復元力による仕事率 $F\dot{x}$ を 1 周期で積分したもの）を計算し、系の全エネルギーで規格化すると $-2\pi\phi$ となる。これが散逸したエネルギーであり、 $\phi(\omega)$ が散逸を示す項であることが分かる。

ここで

$$\phi(\omega_0) = \frac{1}{Q}, \quad (5.4)$$

となる Q が機械的 Q 値である。

この調和振動子の伝達関数の絶対値の 2 乗は

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{m^2 \{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega_0^4 \phi^2(\omega)\}^2}. \quad (5.5)$$

これは $\omega = \omega_0$ のときにピークを持つが、その半値幅を $\Delta\omega_0$ とすると

$$\left| H\left(\omega_0 \pm \frac{\Delta\omega_0}{2}\right) \right|^2 = \frac{|H(\omega_0)|^2}{2}, \quad (5.6)$$

でありピークの幅が小さいときは $\Delta\omega_0 \ll \omega_0$ であり、さらに $\phi(\omega) = \phi(\omega_0) = 1/Q$ と書けるので

$$\Delta\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}, \quad (5.7)$$

となる。式 (5.7) から分かるように、Q 値が低いほど半値幅 $\Delta\omega_0$ は大きくなる。よって伝達関数のピークの半値幅から Q 値を求めるこの方法は、Q 値が低い場合は有効である。

しかし、本研究における懸架系の Q 値はある程度大きいので、懸架系に外力を加えた時の減衰時間から求める手法をとる。先ほどの調和振動子の式 (5.1) において外力項を

$$f(t) = \begin{cases} A \exp(i\omega_0 t) & (t < 0) \\ 0 & (t > 0) \end{cases}, \quad (5.8)$$

とする。このとき、運動方程式を Fourier 変換して \tilde{x} について解いた上で逆 Fourier 変換すると

$$x(t) \propto \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right). \quad (5.9)$$

これより、共振状態に励起した後で励起信号を切り、振動の減衰時間を測定することで Q 値を求めることができる。すなわち、減衰の時定数を τ としたとき

$$x(t) \propto \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (5.10)$$

であるから $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ を用いて

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2Q}{2\pi f_0} = \frac{Q}{\pi f_0}, \quad (5.11)$$

となり,

$$Q = \pi f_0 \tau, \quad (5.12)$$

と計算できる.

式 (5.12) から分かる通り Q 値が高いほど減衰時間が長く、フィッティングの精度が上がるため、本研究の場合のような高い Q 値の測定にはこの方法を用いる.

実際には、MN 段に対応する共振周波数に等しい周波数の励起信号を入れた後でその励起を止め、振動が減衰する時間を測定する. このとき、減衰の様子は図 5.8 に示す通りであり、Q 値が大きいため振動が十分減衰するのに時間がかかるのが分かる. 減衰時間は式 (5.10) で示したように減衰曲線の包絡線を指数関数でフィッティングすれば良い.

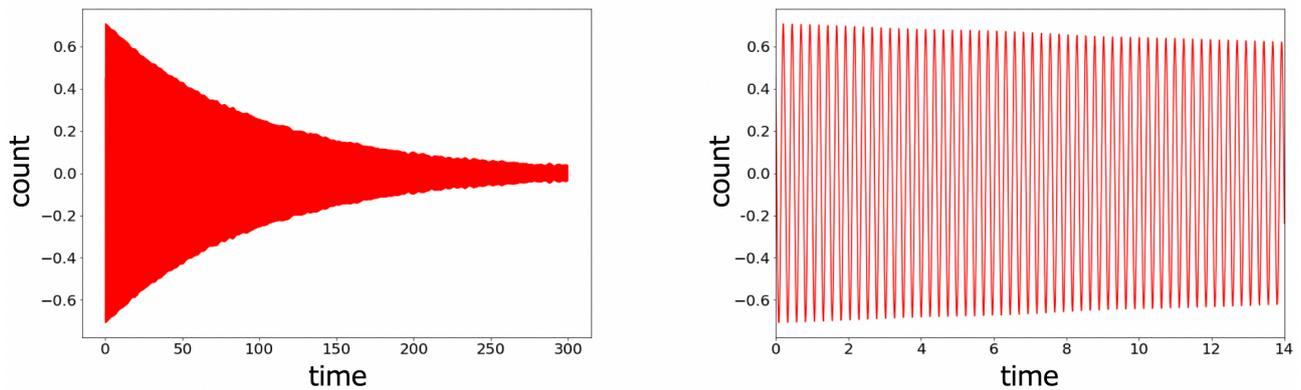


図 5.8 左図は ETMX の MN 段に Y 方向の励起信号 (4.08 Hz) を入れて共振状態にした後に励起信号を切ったとき、振動が減衰する様子を示したものである. Q 値が大きいため振動が十分減衰するまでは時間がかかる (右図は初めの約 15 秒間を拡大したものである).

5.2.3.2 測定結果

297 K と 82 K において ETMX の MN で Q 値を測定した結果, L, P, Y のそれぞれの自由度に対する結果は表 5.5, 5.6, 5.7 のようになった. また、これを図示すると図 5.9 のようになる.

Mode \ 温度	1	2	3	4
297 K	1760.8	1251.7	2981.5	3160.4
82 K	1504.0	1228.6	4245.6	1996.1

表 5.5 Q 値 (ETMX MN L)

Mode \ 温度	1	2
297 K	435.47	3460.3
82 K	440.38	9548.2

表 5.6 Q 値 (ETMX MN P)

Mode \ 温度	1	2	3	4
297 K	233.94	2603.5	4703.8	1245.2
82 K	131.86	1789.9	5291.8	2287.2

表 5.7 Q 値 (ETMX MN Y)

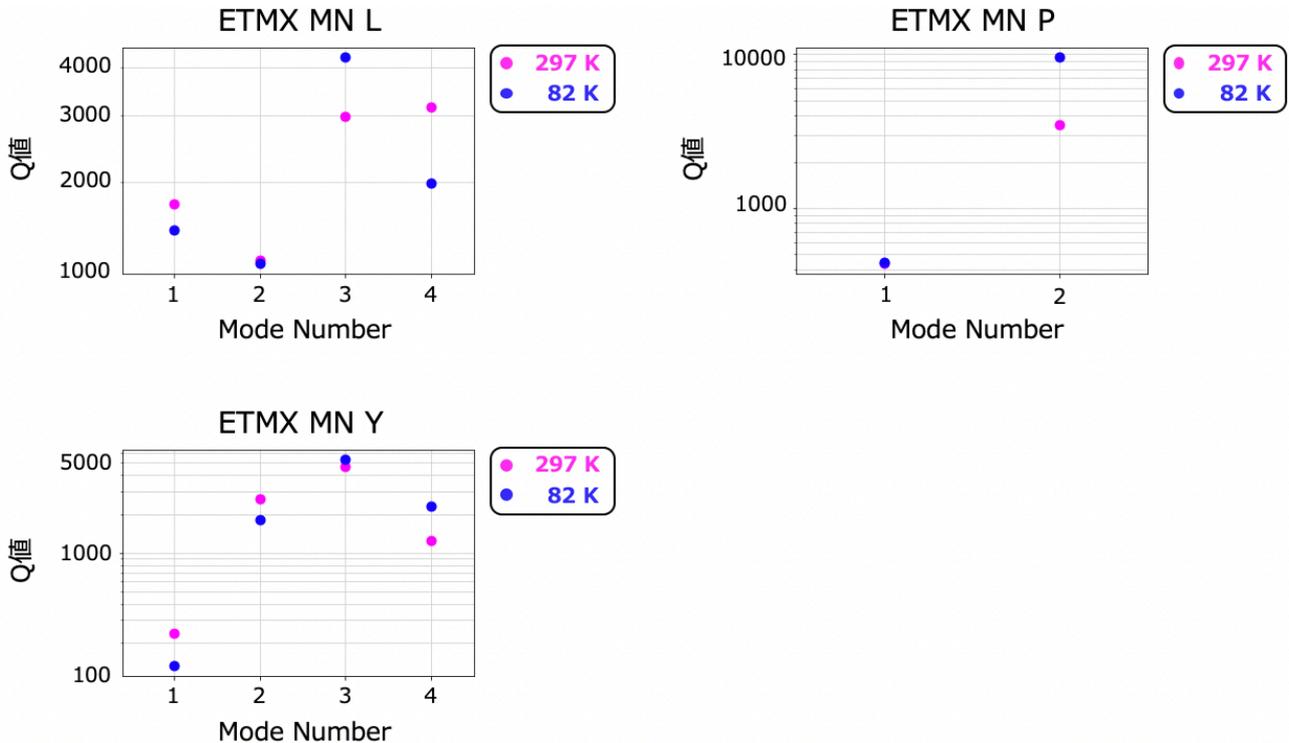


図 5.9 室温と低温での Q 値の比較 (ETMX の MN の L, P, Y) . ピンク、青の点がそれぞれ室温 (297 K) , 低温 (82 K) における Q 値を示している. サファイアが低温において Q 値が高いという性質を持つため、一般には、サファイアファイバーの影響が大きいモードでは低温にすると Q 値が大きくなる.

5.2.3.3 考察

図 5.7 を見ると、L の 3 つめのモード、P の 2 つめのモード、Y の 4 つめのモードでは低温にした時に Q 値が増加している。これは 2.2.4.2 で述べたように、低温で高い Q 値を示すサファイアファイバーの影響を大きく受けるからであると考えられる。実際、[54] にまとめられた Type-A suspension の固有モードのリストによると、これらのモードはサファイアファイバー（低温懸架装置の下部）の影響を大きく受けるモードとなっており、本研究で得られた結果と合致している。

また、ダンピング制御に変更の必要性があるかどうかは第 6 章に示す。

第 6 章

ダンピング制御

この章ではダンピング制御について、その必要性と原理を説明した後、実際の制御とその効果について記す。

6.1 ダンピング制御とその必要性

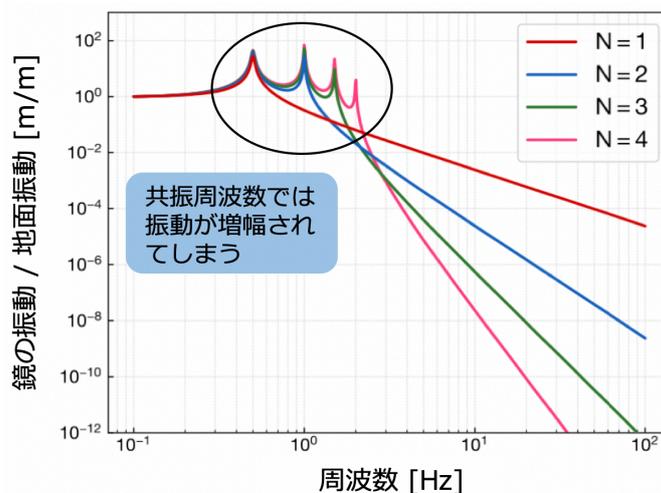


図 6.1 多段振り子を用いた防振では共振周波数以上の周波数で高い防振比を得ることができる一方、共振周波数では鏡に伝わる振動が増幅されてしまう。

第 3 章で示した通り、多段振り子を用いた防振系では共振周波数以上の周波数で高い防振比を得ることができる。その一方で、共振周波数では鏡に伝わる振動が増幅されてしまう（図 6.1）。これでは、干渉計が安定な状態を保てなくなってしまい、観測を行うことができない。そこで共振周波数において振動を減衰させるダンピング制御が必要になる。ここで、ダンピング制御とは鏡の変位を局所的にセンサで検出し、それを打ち消す力をアクチュエータによって鏡に加えるフィードバック制御である。つまり、懸架系にある力（外乱）が加わったとき、懸架系の応答をフォトセンサが検知し、デジタルシステムに信号を送る。その中でフィルタを通してアクチュエータに信号を送り、最初に働いた力を打ち消す。そのダイアグラムは図 6.2 に示した通りである。

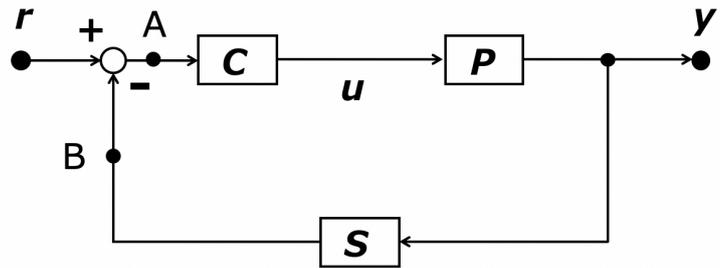
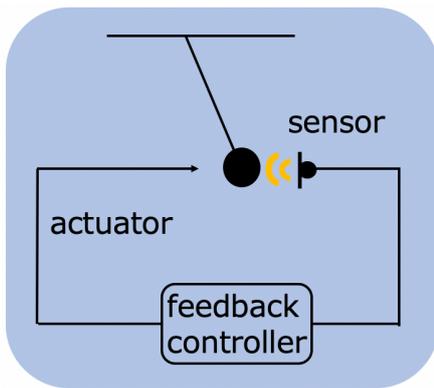


図 6.2 (左) 懸架系のダンピング制御システム概念図と (右) それと等価なフィードバック制御のブロックダイアグラム. 鏡の変位を局所的にセンサで検出し, それを打ち消す力をアクチュエータによって鏡に加えている. 図中の C は制御器, u は制御入力, P は制御対象, S はセンサを表す. また, r は目標量, y は出力量である.

このときの系の開ループ (open-loop) 伝達関数は

$$T_{\text{open}} = CP, \tag{6.1}$$

であり, 閉ループ (closed-loop) 伝達関数は

$$T_{\text{closed}} = \frac{CP}{1 + SCP} = \frac{T_{\text{open}}}{1 + ST_{\text{open}}}, \tag{6.2}$$

と表される.

ここで, ダンピングフィルタの実装には一巡伝達関数 ST_{open} の位相が重要である. ここで, 閉ループではなく開ループ (一巡伝達関数) で考えれば良い理由は以下の通りである.

図 6.2 において点 A に単位インパルス¹を入力したとする. このとき単位インパルスは全ての角周波数成分を含む正弦波の Fourier 級数に展開できるが, それらの正弦波は点 A から点 B までの周波数応答特性によって振幅はゲイン倍され, 位相もいくらか遅れて点 B に出力される.

このうち位相遅れが 180° である角周波数成分を考える. 位相が 180° ずれているということは正弦波信号の正負が反転するということであるが, 図 6.2 において点 B から点 A に戻る際にも正負が反転する. つまり, 点 A に入力された単位インパルスのうち, 位相遅れが 180° である角周波数成分は正負が変わらず点 A に戻ってくる. よってループを一巡したときの振る舞いは扱いの困難な閉ループではなく, 開ループ (一巡伝達関数) を考えれば良い.

このとき, HT_{open} のゲインが 1 となる周波数 (UGF: Unity Gain Frequency) における位相に気をつける必要がある.

先程と同様に位相遅れが 180° となる角周波数成分を考える. 図 6.2 の点 A を出た信号は振幅が開ループのゲイン倍されて戻ってくる. この信号はさらにループを回り, その後も同様に回り続ける. このとき開ループゲインが 1 より小さければ振幅は減少して閉ループ系は漸近安定になる. 一方で, 開ループゲインが 1 より大きい場合は振幅が徐々に増大し, 閉ループ系は発散し, 不安定となる. ここで, ナイキスト軌跡 (図 6.3) が複素数平面上の点 $(-1+0j)$ を通る場合, 位相遅れが 180° となる角周波数の開ループゲインが 1 となる.

¹ ディラックのデルタ関数とも呼ばれ, $t \geq 0$ で連続な任意の関数 $f(t)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0),$$

の作用をする関数である.

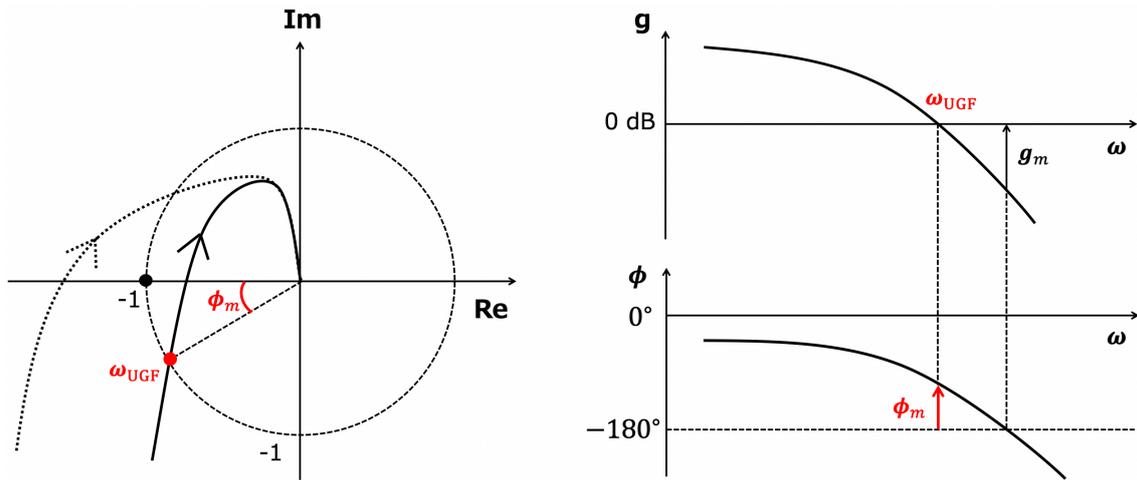


図 6.3 (左) 周波数応答を複素数平面上でベクトルとして表し、その先端を結んで得られる曲線で、ナイキスト軌跡と呼ばれる。UGF はナイキスト軌跡と単位円が交わる点であり、原点からその点に向かうベクトルの角度を負の実軸から測ったときの角度が位相余裕である。一巡周波数応答（一巡伝達関数の周波数応答）のベクトル軌跡が $(-1+0j)$ の右側で負の実軸と交われば系は安定、左側で交われば不安定となる。
 (右) ボード図と呼ばれるもので、周波数応答と各周波数の関係をゲイン特性曲線、位相特性曲線で表す。UGF はボード図ではゲイン特性曲線が 0 dB の線と交わる点であり、またそのときの位相と -180° との差が位相余裕である。フィルタを作成する際はボード図を見ながら UGF で位相が 180 度回っていないか（位相余裕がどの程度あるか）を確認すれば良い。

このときは信号は増大も減少もせず、点 $(-1+0j)$ が閉ループ系の安定と不安定の境界となる。つまり、 $T_{\text{open}}S$ の UGF において位相が 180° 以上回っていれば、閉ループ伝達関数 T_{closed} が発散し、系のフィードバック制御が成り立たない。

すなわち、安定した系を実現するためには $T_{\text{open}}S$ のピークにのみゲインを持たせて、このとき UGF での位相が 180° 以上回らないようなフィルタを設計する必要がある。ここで、 $T_{\text{open}}S$ に 1 より大きなゲインを持たせるといことは、 T_{closed} のゲインを下げるということであり、これをダンピングしたい共振周波数に対してのみ行えばよいということである。

6.2 ダンピング制御の原理

どのようなフィルタを設計すればよいかをより具体的に考えるために、ダンピング制御の原理について説明する。先に記述したように懸架系は多段振子であるが、ここでは簡単のため単振子で考える。速度に比例した項を含めて図 6.4 のようなバネで吊るされたモデルを考えると、この系の運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad (6.3)$$

となる。ここで $c\dot{x}$ は速度に比例した抵抗力である (c : 定数)。これを解けば減衰振動に対する解が得られるが、今は周期的な外力（地面振動など）が加わる強制的な振動を考えるべきであり、この場合式 (6.3) は複素数 z を用いて

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 a_0 e^{i\omega t}, \quad (6.4)$$

ここで $\gamma = c/2m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ であり、 a_0 : 外力の振幅、 ω : 外力の角振動数である。

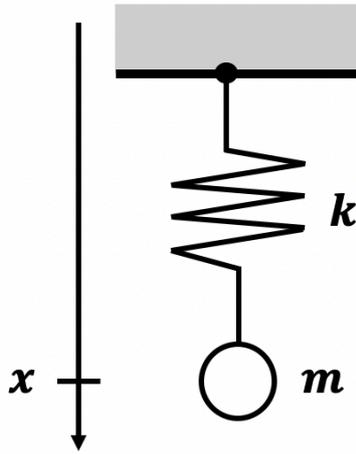


図 6.4 バネ振子によるモデル

この方程式を解くために $z = ae^{i\omega t}$ とおくと, $\dot{z} = i\omega ae^{i\omega t}$, $\ddot{z} = -\omega^2 ae^{i\omega t}$ なので

$$-\omega^2 a + 2\gamma i\omega a + \omega_0^2 a = \omega_0^2 a_0. \quad (6.5)$$

これを整理すると

$$a = \frac{\omega_0^2 a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} e^{-i\phi}. \quad (6.6)$$

ただし

$$\tan \phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (6.7)$$

これが特解であり, 一般解は外力が 0 のときの解と合わせたもの²なので, それは

$$z = ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \delta) + \frac{\omega_0^2 a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \phi). \quad (6.8)$$

ただし $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ であり, また a, δ は初期条件で決まる値である.

式 (6.8) の右辺第 1 項は十分長い時間で 0 になるが, 第 2 項は外力と共に振動を続ける. この振動の振幅

$$|A| = \frac{\omega_0^2 a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad (6.9)$$

を a_0 で割った値の周波数依存性は図 6.5 のようになる.

この図より, γ が非常に小さいときは系が発散し, γ が小さいとき固有角振動数に近づくと振幅が大きくなるのが分かる (共振). 一方, γ が大きくなると共振のピークが小さくなっていくが, $\gamma = c/2m$ なのでこれは定数 c を調節することで共振のピークを抑えられる (ダンピングできる) ことを示している. すなわち, ダンピング制御のためには速度に比例した力 ($c\dot{x}$) を調節するようなフィルタを設計すればよいと分かる.

² $\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ において, 解として $z = e^{\lambda t}$ を仮定して解けばよい.

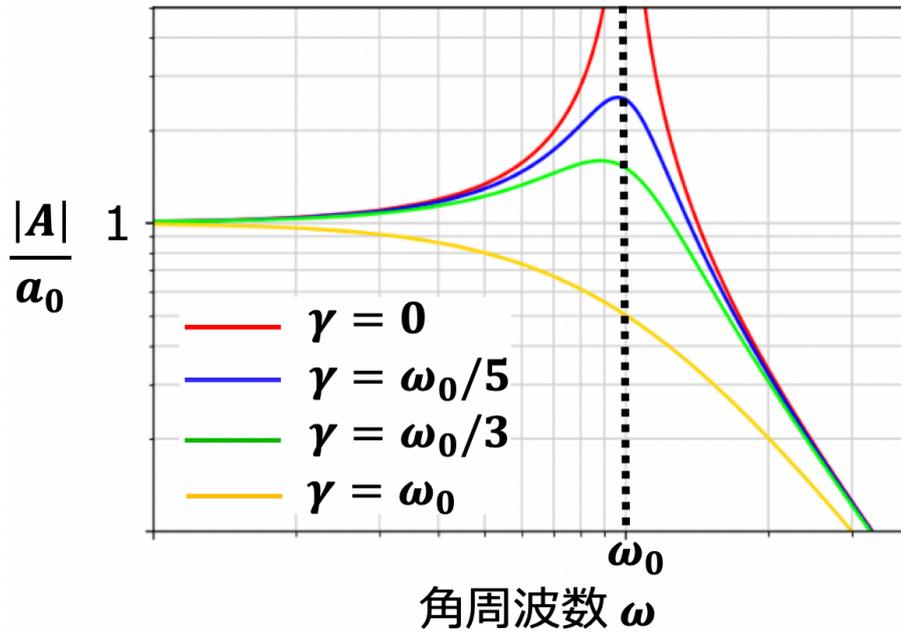


図 6.5 共振の様子を示す曲線. γ が大きくなるにつれ, 共振のピークは小さくなっていく.

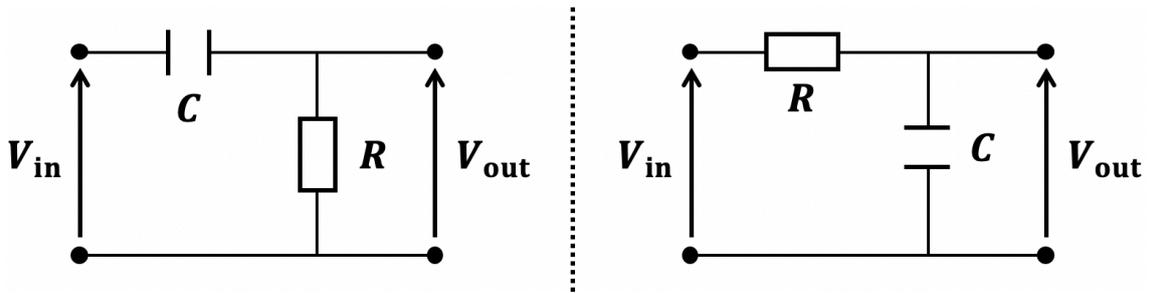


図 6.6 1 次の高パスフィルタ (左)・ローパスフィルタ (右)

ここで, 速度に比例した力を調節するフィルタについて, 典型的な例として 1 次の高パスフィルタ・ローパスフィルタを考える. まず 1 次の高パスフィルタであるが, コンデンサと抵抗を用いて図 6.6 の左側のようになる. 回路に流れる電流を I , コンデンサに蓄えられる電荷量を Q とすると

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (6.10)$$

である. 入力信号が入ったとき, コンデンサの両端電圧は $0 - V_{in} = -V_{in}$ であり, $Q = C \times (-V_{in})$ となるので

$$I = \frac{d}{dt}(-CV_{in}) = -C \frac{dV_{in}}{dt}. \quad (6.11)$$

また, Ohm の法則より $V_{out} = IR$ であるから

$$V_{out} = -RC \frac{dV_{in}}{dt}. \quad (6.12)$$

つまり, ハイパスフィルタを通ると入力信号が微分されて出力される.

例えば入力として大きさ V_{in} の矩形波を考えると, 入力の瞬間はコンデンサに電荷が蓄えられないので両端電圧の差は 0 である. つまり $V_{in} = V_{out}$ であり, 抵抗に流れる電流は $I_0 = V_{in}/R$ となる. この電流によってコンデンサに電荷が蓄えられ, V_{out} が徐々に小さくなる. 最終的に矩形波が抜けるとき入力地点の電

位が V_{in} だけ下がったことになり、これに応じて出力電圧 V_{out} も V_{in} だけ下がる。この後にコンデンサに蓄えられた電荷が放電して入力前の電位に戻る。ここで、矩形波が時定数 $1/RC$ に対して十分短ければその形は変わらず出力され、逆に十分長ければ先に示した通り出力電圧が微分される。つまり、高周波の信号はそのまま出力するが、低周波の信号は微分して出力する「ハイパス」フィルタである。

次に 1 次のローパスフィルタであるが、これもコンデンサと抵抗を用いて図 6.6 の右側のように表される。流れる電流

$$I = \frac{V_{in}}{R}, \quad (6.13)$$

によってコンデンサに電荷 Q が蓄えられるとすると

$$Q = \int I dt, \quad (6.14)$$

であり、このときの出力電圧は

$$V_{out} = -\frac{Q}{C} = -\frac{1}{RC} \int V_{in} dt. \quad (6.15)$$

つまり、ローパスフィルタを通ると入力信号が積分されて出力される。

先ほどと同様に大きさ V_{in} の矩形波が入力されたとする。その瞬間は出力電圧は 0 だが、抵抗 R を通して電流が流れ徐々に電圧が上がる。その後矩形波が抜ける瞬間はコンデンサの両端の電位差が急に変化するわけではなく、出力電圧の符号を保ちながら時間と共に放電する。ここで、矩形波が時定数に対して十分短ければ先に示した通り出力電圧が積分される。逆に十分長ければその形は変わらず出力される（波形の変化に対してスケールが長い）。つまり低周波の信号はそのまま出力するが、高周波の信号は積分して出力する「ローパス」フィルタである。

これらの例をふまえて考えると、共振ピークのダンピングのためには共振周波数のある領域においてハイパスフィルタがかかるようなフィルタを設計すればよい。すなわちフォトセンサで得た信号を微分してフィードバックすればよいことが分かる。

6.3 ダンピングフィルタの実装とその評価

6.3.1 共振ピークの同定と行列計算

各懸架装置の各自由度に対し、共振ピークを同定する必要がある。そのため、まずはアクチュエータで力を加えた際、懸架系が思い通りの方向に動くかを確認した。これは懸架系の外側にあり、独立にキャリブレーションされている OpLev の信号を見て行った。その後、アクチュエータで動かした方向とフォトセンサの動作方向の正負が等しいかを確認した後、ホワイトノイズを入れて自由度ごとに励起し、伝達関数を測定した（図 6.7 及び補遺 D）。そこから各自由度の固有モードに対応する共振ピークを特定し、表 6.1~6.4 に示した通りの共振周波数を得た。

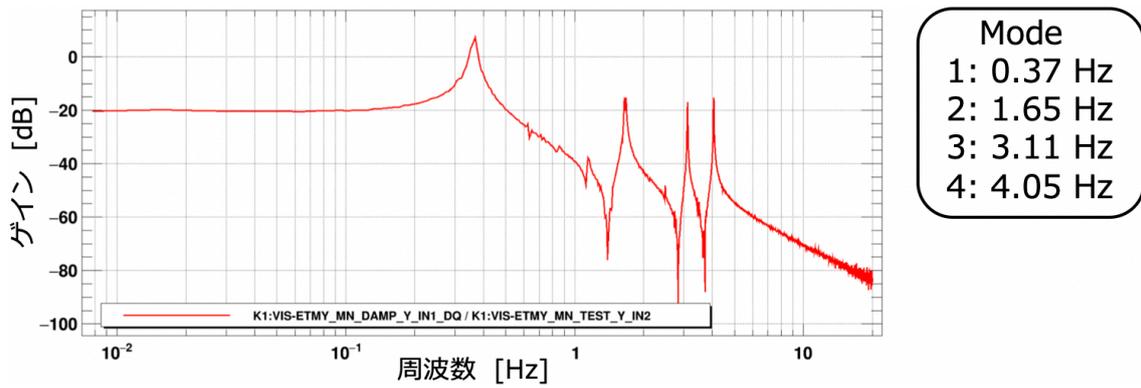


図 6.7 懸架系の応答 (ETMY MN Y) . ホワイトノイズを入れて MN 段を Y 方向に励起し, そこから MN 段の Y 方向の動きまでの伝達関数を測定した. 他の懸架系, 自由度の伝達関数については補遺 D に記した.

自由度 \ Mode	1	2	3	4
L	0.63 Hz	1.46 Hz	2.12 Hz	2.47 Hz
T	0.63 Hz	1.49 Hz	2.12 Hz	2.49 Hz
R	0.77 Hz			
P	0.76 Hz	7.42 Hz		
Y	0.30 Hz	1.66 Hz	3.13 Hz	4.08 Hz

表 6.1 共振周波数 (ETMX)

自由度 \ Mode	1	2	3	4
L	0.63 Hz	1.46 Hz	2.13 Hz	2.48 Hz
T	0.63 Hz	1.52 Hz	2.09 Hz	2.516 Hz
R	0.73 Hz			
P	0.82 Hz	7.40 Hz		
Y	0.37 Hz	1.65 Hz	3.11 Hz	4.05 Hz

表 6.2 共振周波数 (ETMY)

自由度 \ Mode	1	2	3	4
L	0.63 Hz	1.46 Hz	2.19 Hz	2.50 Hz
T	0.63 Hz	1.45 Hz	2.13 Hz	2.49 Hz
R	0.76 Hz			
P	0.85 Hz	7.39 Hz		
Y	0.30 Hz	1.67 Hz	3.09 Hz	4.09 Hz

表 6.3 共振周波数 (ITMX)

Mode 自由度	1	2	3	4
L	0.6328 Hz	1.461 Hz	2.188 Hz	2.500 Hz
T	0.6250 Hz	1.469 Hz	2.156 Hz	2.500 Hz
R	0.7500 Hz			
P	0.8516 Hz	7.391 Hz		
Y	0.2969 Hz	1.672 Hz	3.094 Hz	4.086 Hz

表 6.4 共振周波数 (ITMY)

また、ダンピングフィルタは各自由度に対してかけるので、自由度ごとに対応するようにフォトセンサの信号を合成している。ここで、フォトセンサが懸架装置の揺れを正確に検知して同程度の出力をすれば、信号の合成はセンサの幾何学的な配置で決まる。また、アクチュエータについても同様に、入出力の関係が同じ場合は幾何学的配置に基づいて信号の合成を行えば、それぞれの自由度に対して個別に力を加えることができる。

しかし、自由度にはカップリングが存在し、ある自由度にのみ力を加えるつもりでも、他の自由度が動いてしまうことがある。よって、対象の自由度以外に対してダンピング制御を行わないよう、自由度ごとのカップリングを以下のようにして求める必要がある。

まず、懸架装置を共振周波数で揺らし続ける。この際、その周波数に共振ピークを持たない自由度の揺れは励起されないが、共振ピークを持つ場合は徐々に揺れが大きくなる。それらの自由度に対し、揺れの大きさの比を取り、それを打ち消す (decoupling する) ように式 (6.16) に示す行列の非対角成分を求める。

$$\begin{pmatrix} L' \\ T' \\ V' \\ R' \\ P' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & C_{TL} & C_{VL} & C_{RL} & C_{PL} & C_{YL} \\ C_{LT} & 1 & C_{VT} & C_{RT} & C_{PT} & C_{YT} \\ C_{LV} & C_{TV} & 1 & C_{RV} & C_{PV} & C_{YV} \\ C_{LR} & C_{TR} & C_{VR} & 1 & C_{PR} & C_{YR} \\ C_{LP} & C_{TP} & C_{VP} & C_{RP} & 1 & C_{YP} \\ C_{LY} & C_{TY} & C_{VY} & C_{RY} & C_{PY} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ T \\ V \\ R \\ P \\ Y \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

ただし、プライム付き文字が上記の測定で得られた自由度、そうでない文字が真の自由度であり、非対角成分が自由度ごとのカップリングを表している。

6.3.2 ダンピングフィルタの実装とその効果

6.2 節で示した通り、共振周波数が存在する周波数領域において信号を微分して系に返すフィルタを作成すればダンピング制御を実現できる。そこで、フォトセンサで得られた信号に対してそのような動作を行うフィルタをインストールした。図 6.8 は ETMX の L 方向に対するフィルタを示したものである。

10 Hz あたりまでは共振周波数での振動を抑えるためにハイパスフィルタをかけている。具体的には 25 Hz に極を、0 Hz に零点を設定しており、この部分が鏡の速度に比例した力を系にフィードバックしている。

一方、ダンピング制御が必要ないそれ以降の周波数領域ではノイズを減らすため³にローパスフィルタをかけている。

また、図 6.9 は前小節で記したダンピングフィルタをかけた上で、励起信号から MN の動きまでの伝達関数を測定した結果を示している。赤線はフィルタなしの場合であるが、この時は共振周波数において、揺れが大きくなっているのが分かる。しかし、ダンピングフィルタをかけると青線で示された通り、その揺れが抑えられている。これより、地震などの何らかの理由により低温懸架装置の共振が励起された場合でも、このフィルタがかけられていれば、その共振をダンプすることができると言える。

³ フィードバック制御におけるノイズについては第 7 章参照。

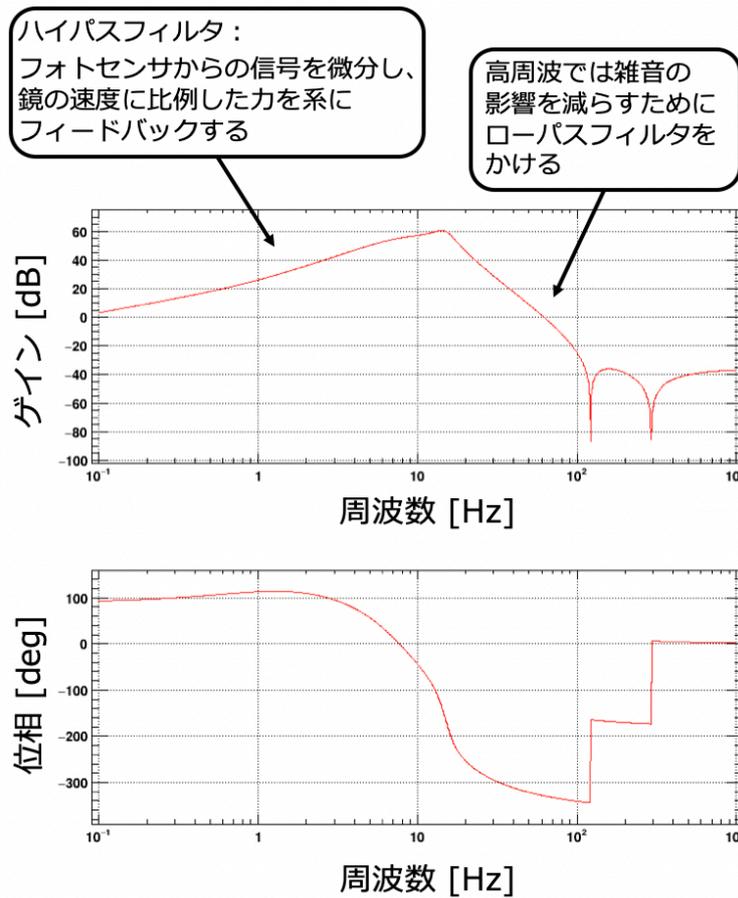


図 6.8 ダンピングフィルタの例 (ETMY MN Y) . ダンピングしたい共振周波数が存在する低周波では、鏡の速度に比例した力を系にフィードバックするためのハイパスフィルタをかけている. 一方、高周波ではノイズの影響を抑えるためにローパスフィルタをかけた.

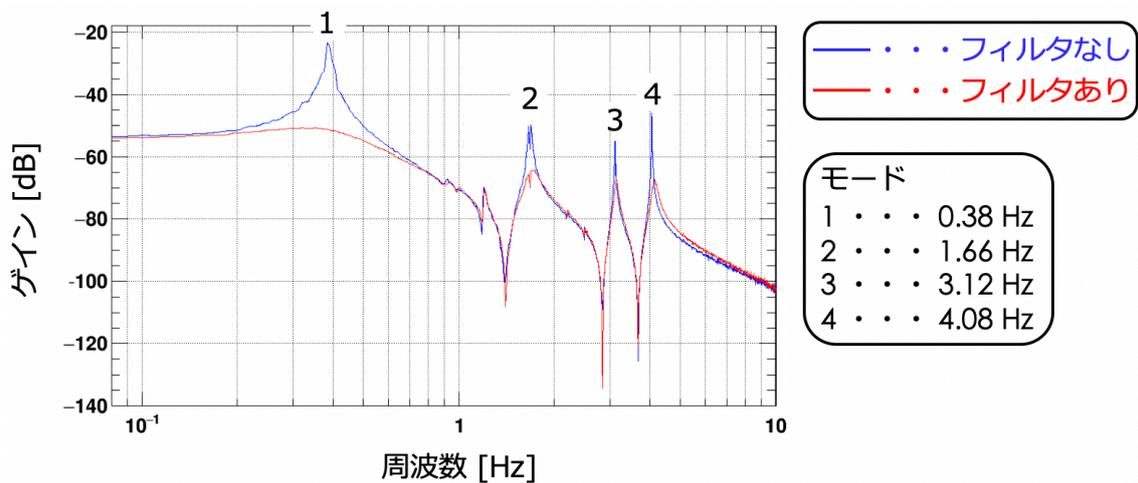


図 6.9 ダンピングフィルタをかけた時の伝達関数 (ETMY MN 段について Y 方向に励起し、そこから MN 段の Y 方向の動きまでの伝達関数を測定した) . フィルタをかけた場合 (青) はフィルタなしの場合 (赤) に比べて共振周波数における揺れが抑制されているのが分かる.

6.3.3 1/e 減衰時間によるダンピング制御の評価

共振周波数における揺れを抑えられることは分かったが、その抑制にどれだけ時間を要するかという点も、観測状態への素早い復帰という点で重要である。これは図 3.6 に示した Calm-down Phase において、各共振モードの振幅が 1/e に減衰する時間によって評価される。ここでは 5.2.3.1 で示したように、共振周波数に等しい周波数の励起信号を入れた後でその励起を止め、振動が減衰する時間を測る、という方法で測定を行った。

図 6.10 は ETMY の Y のモード 4 (4.08 Hz) の共振について、励起した揺れが収まるまでの時間をダンピング制御なし、ありの場合で比較したものである。青線はダンピング制御なしの場合であり、励起した揺れの振幅が 1/e に収まるまでに約 97 秒かかっていることが分かった。一方、ダンピング制御をかけた際の減衰の様子は赤線で示された通りで、約 2 秒で振幅が 1/e に収まっているのが分かる。Calm-down Phase における減衰時間に対する要求値は 60 秒とされているので、これは十分早く振動を抑えられていると言える。

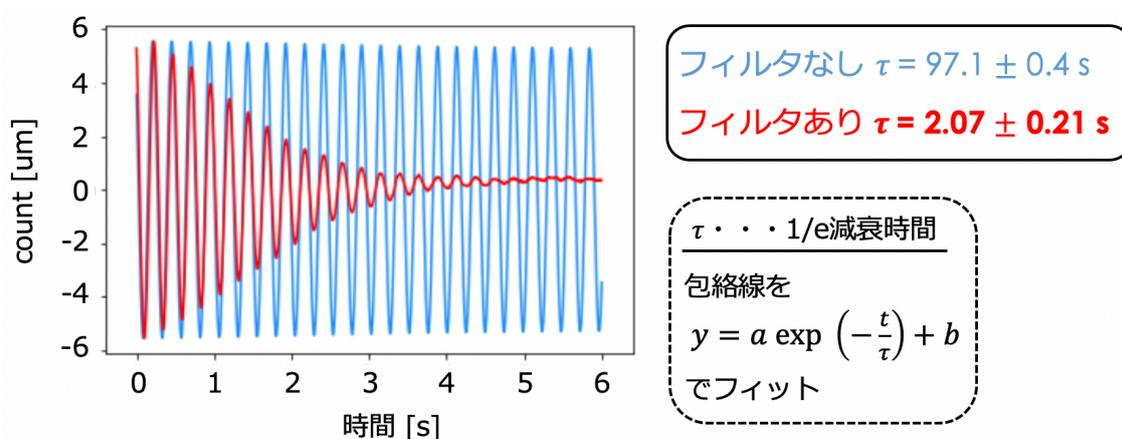


図 6.10 励起した共振が収まる様子。ダンピング制御なし（青）の場合は振動が収まるまでに約 97 秒待つ必要があるが、制御をかけた場合（赤）はそれが 2 秒程度に短縮される。

同様の測定を懸架装置、自由度に対しても行った（全て常温）。図 6.11~6.14 および表 6.5~6.8 はその結果をまとめたもので、ダンピング制御なしの場合（青点）およびダンピング制御ありの場合（赤点）の、1/e 減衰時間の変化を示している。また、図中の緑線は Calm-down Phase における減衰時間に対する要求値（60 秒）である。

これより、各懸架装置の各自由度の各モードに対して、要求値を十分満たすダンピング制御を行うことができていると言える。これは外乱などで干渉計のロックが失われた場合でも速やかに再ロックすることが可能であることを意味し、観測時間の増加につながると期待される。

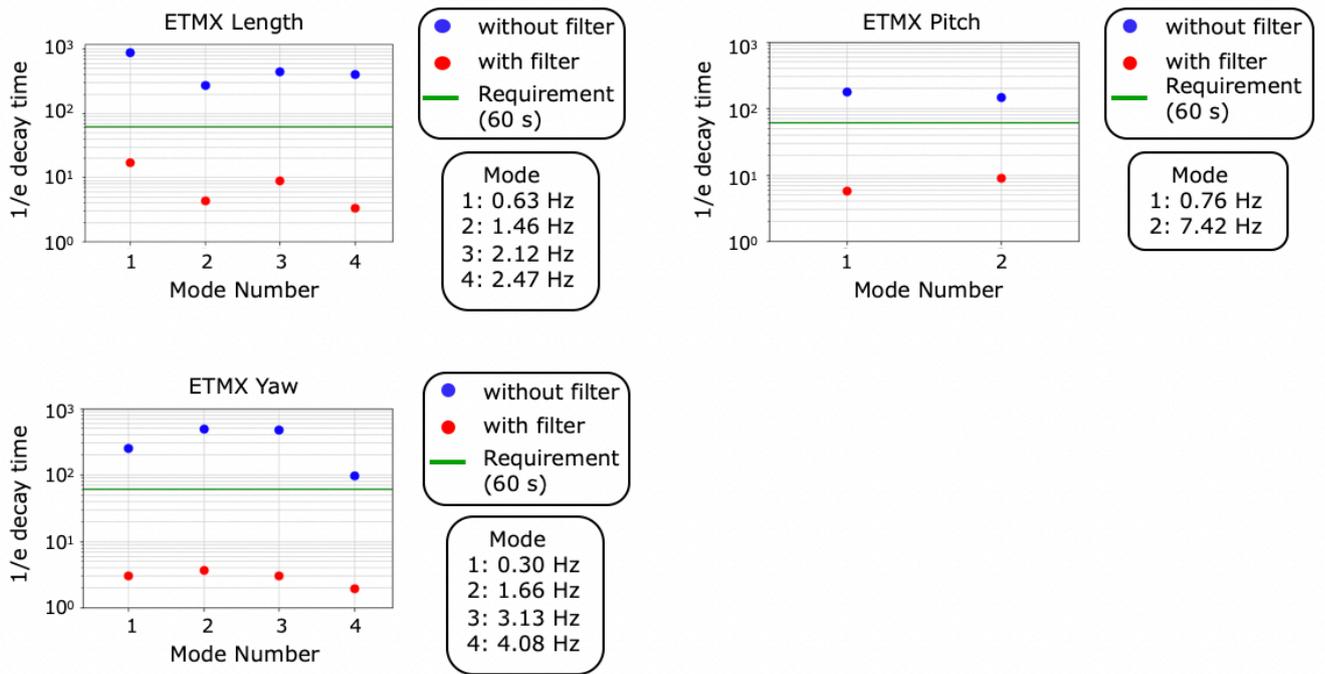


図 6.11 ダンピングフィルタあり / なしの 1/e 減衰時間の比較 (ETMX). 青色, 赤色の点がそれぞれダンピングフィルタなし, ありの時の結果を示している. なお, 緑線は Lock-acquisition phase における要求値を示しており, ダンピングフィルタを用いると十分早く外乱が抑制されることがこの図から分かる.

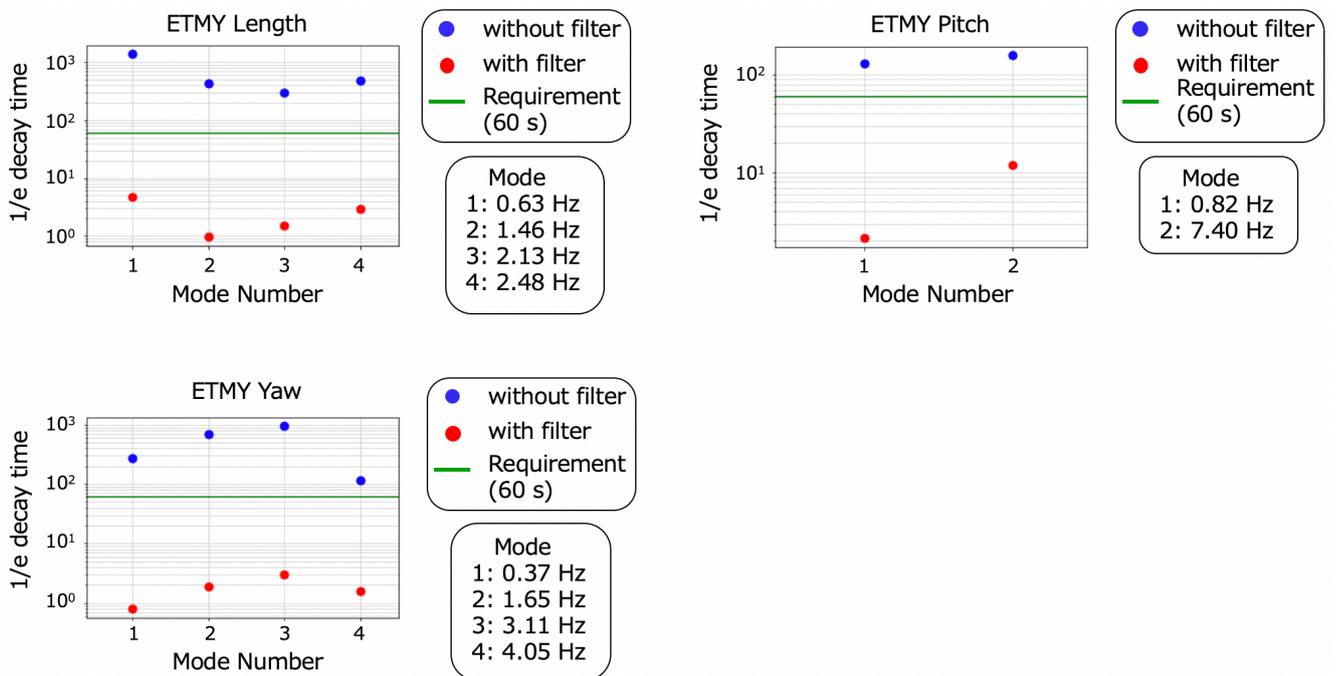


図 6.12 ダンピングフィルタあり / なしの 1/e 減衰時間の比較 (ETMY). 青色, 赤色の点がそれぞれダンピングフィルタなし, ありの時の結果を示している. なお, 緑線は Lock-acquisition phase における要求値を示しており, ダンピングフィルタを用いると十分早く外乱が抑制されることがこの図から分かる.

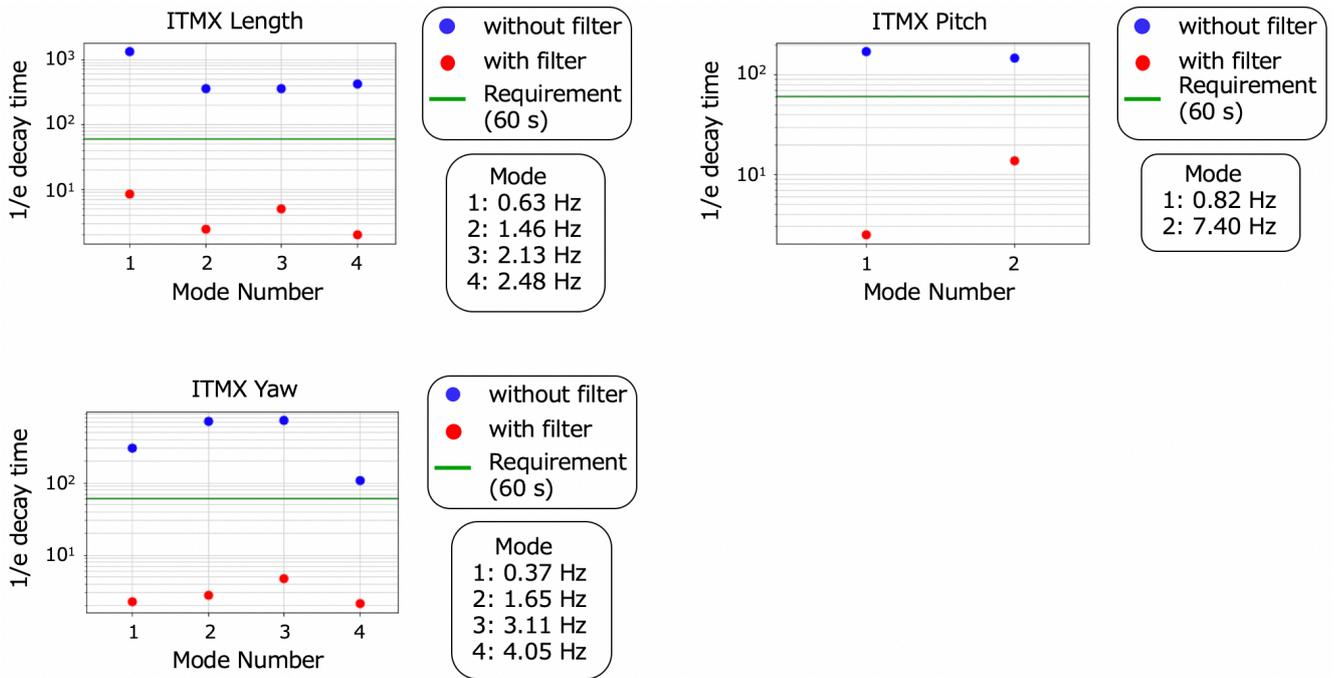


図 6.13 ダンピングフィルタあり / なしの 1/e 減衰時間の比較 (ITMX). 青色, 赤色の点がそれぞれダンピングフィルタなし, ありの時の結果を示している. なお, 緑線は Lock-acquisition phase における要求値を示しており, ダンピングフィルタを用いると十分早く外乱が抑制されることがこの図から分かる.

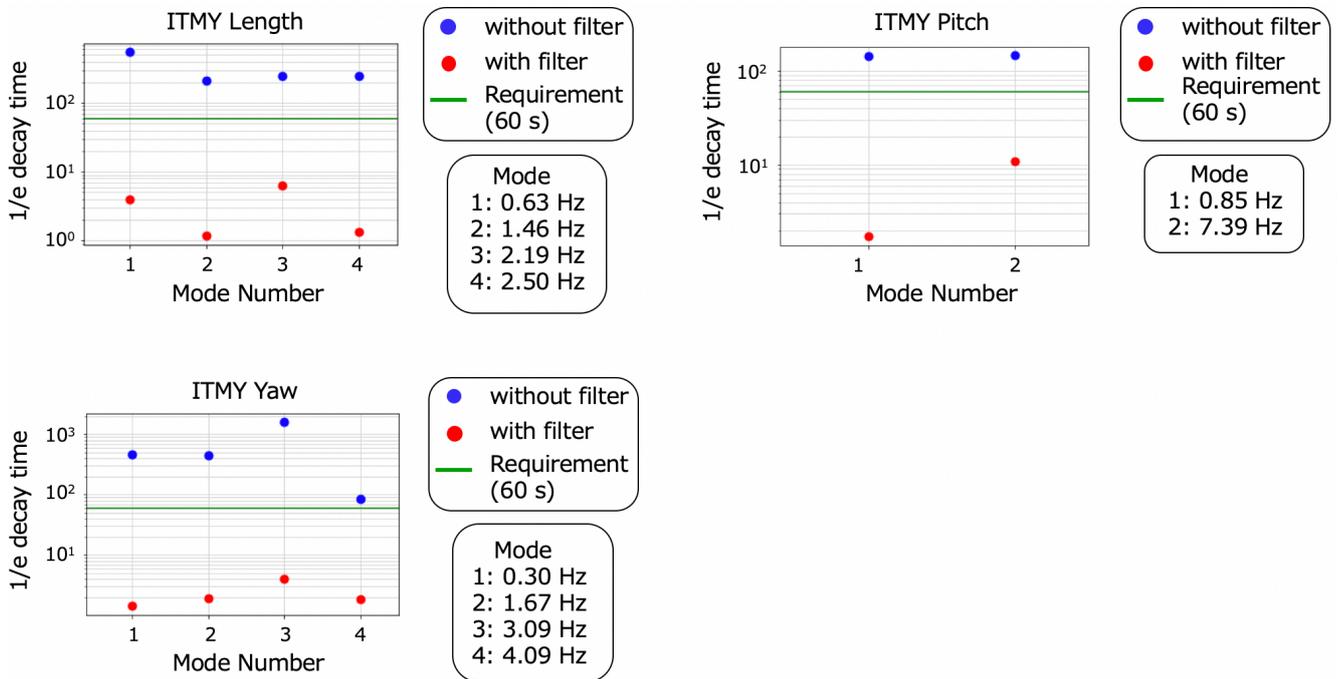


図 6.14 ダンピングフィルタあり / なしの 1/e 減衰時間の比較 (ITMY). 青色, 赤色の点がそれぞれダンピングフィルタなし, ありの時の結果を示している. なお, 緑線は Lock-acquisition phase における要求値を示しており, ダンピングフィルタを用いると十分早く外乱が抑制されることがこの図から分かる.

	フィルタ	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
L	なし	$(8.921 \pm 0.174) \times 10^2$ s	$(2.702 \pm 0.004) \times 10^2$ s	$(4.474 \pm 0.046) \times 10^2$ s	$(4.057 \pm 0.007) \times 10^2$ s
	あり	$(1.740 \pm 0.076) \times 10^1$ s	4.382 ± 0.706 s	4.620 ± 0.296 s	3.315 ± 0.555 s
P	なし	$(1.788 \pm 0.028) \times 10^2$ s	$(1.485 \pm 0.001) \times 10^2$ s		
	あり	5.708 ± 0.263 s	8.975 ± 0.150 s		
Y	なし	$(2.509 \pm 0.003) \times 10^2$ s	$(4.978 \pm 0.062) \times 10^2$ s	$(4.793 \pm 0.023) \times 10^2$ s	$(9.708 \pm 0.015) \times 10^1$ s
	あり	3.012 ± 0.227 s	3.623 ± 0.086 s	3.038 ± 0.105 s	1.968 ± 0.212 s

表 6.5 1/e 減衰時間 (ETMX)

	フィルタ	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
L	なし	$(1.381 \pm 0.003) \times 10^3$ s	$(4.310 \pm 0.006) \times 10^2$ s	$(3.047 \pm 0.028) \times 10^2$ s	$(4.790 \pm 0.002) \times 10^2$ s
	あり	4.691 ± 0.090 s	$(9.685 \pm 0.833) \times 10^{-1}$ s	1.490 ± 0.281 s	2.959 ± 0.572 s
P	なし	$(1.313 \pm 0.001) \times 10^2$ s	$(1.572 \pm 0.001) \times 10^2$ s		
	あり	2.141 ± 0.027 s	$(1.201 \pm 0.007) \times 10^1$ s		
Y	なし	$(2.691 \pm 0.024) \times 10^2$ s	$(6.872 \pm 0.169) \times 10^2$ s	$(9.353 \pm 0.025) \times 10^2$ s	$(1.167 \pm 0.006) \times 10^2$ s
	あり	$(7.999 \pm 0.024) \times 10^{-1}$ s	1.921 ± 0.239 s	3.057 ± 0.164 s	1.560 ± 0.121 s

表 6.6 1/e 減衰時間 (ETMY)

	フィルタ	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
L	なし	$(1.305 \pm 0.022) \times 10^3$ s	$(3.523 \pm 0.014) \times 10^2$ s	$(3.585 \pm 0.096) \times 10^2$ s	$(4.276 \pm 0.096) \times 10^2$ s
	あり	8.692 ± 0.695 s	2.429 ± 0.714 s	5.088 ± 0.135 s	2.020 ± 0.454 s
P	なし	$(1.710 \pm 0.109) \times 10^2$ s	$(1.493 \pm 0.001) \times 10^2$ s		
	あり	2.475 ± 0.123 s	$(1.369 \pm 0.004) \times 10^1$ s		
Y	なし	$(3.026 \pm 0.037) \times 10^2$ s	$(7.105 \pm 0.043) \times 10^2$ s	$(7.260 \pm 0.202) \times 10^2$ s	$(1.067 \pm 0.006) \times 10^2$ s
	あり	2.228 ± 0.075 s	2.788 ± 0.161 s	4.659 ± 0.085 s	2.118 ± 0.084 s

表 6.7 1/e 減衰時間 (ITMX)

	フィルタ	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
L	なし	$(5.475 \pm 0.065) \times 10^2$ s	$(2.126 \pm 0.004) \times 10^2$ s	$(2.435 \pm 0.027) \times 10^2$ s	$(2.446 \pm 0.070) \times 10^2$ s
	あり	3.890 ± 0.110 s	1.169 ± 0.150 s	6.251 ± 0.152 s	1.318 ± 0.256 s
P	なし	$(1.455 \pm 0.035) \times 10^2$ s	$(1.457 \pm 0.001) \times 10^2$ s		
	あり	1.724 ± 0.114 s	$(1.093 \pm 0.006) \times 10^1$ s		
Y	なし	$(4.674 \pm 0.005) \times 10^2$ s	$(4.553 \pm 0.117) \times 10^2$ s	$(1.587 \pm 0.008) \times 10^3$ s	$(8.667 \pm 0.001) \times 10^2$ s
	あり	1.441 ± 0.011 s	1.942 ± 0.074 s	3.994 ± 0.177 s	1.859 ± 0.071 s

表 6.8 1/e 減衰時間 (ITMY)

6.4 冷却した際の制御の変更

第5章において測定した82 KにおけるETMXの伝達関数、共振周波数を測定した。伝達関数の形に大きな変化は見られず、また共振周波数は数パーセント高くなっただけであり、それによるUGFでの位相余裕の変化は少なかった。そこで、297 Kでのダンピング制御のゲインだけを変えて82 Kにおける1/e減衰時間を測定したところ図6.15および表6.9のようになった。

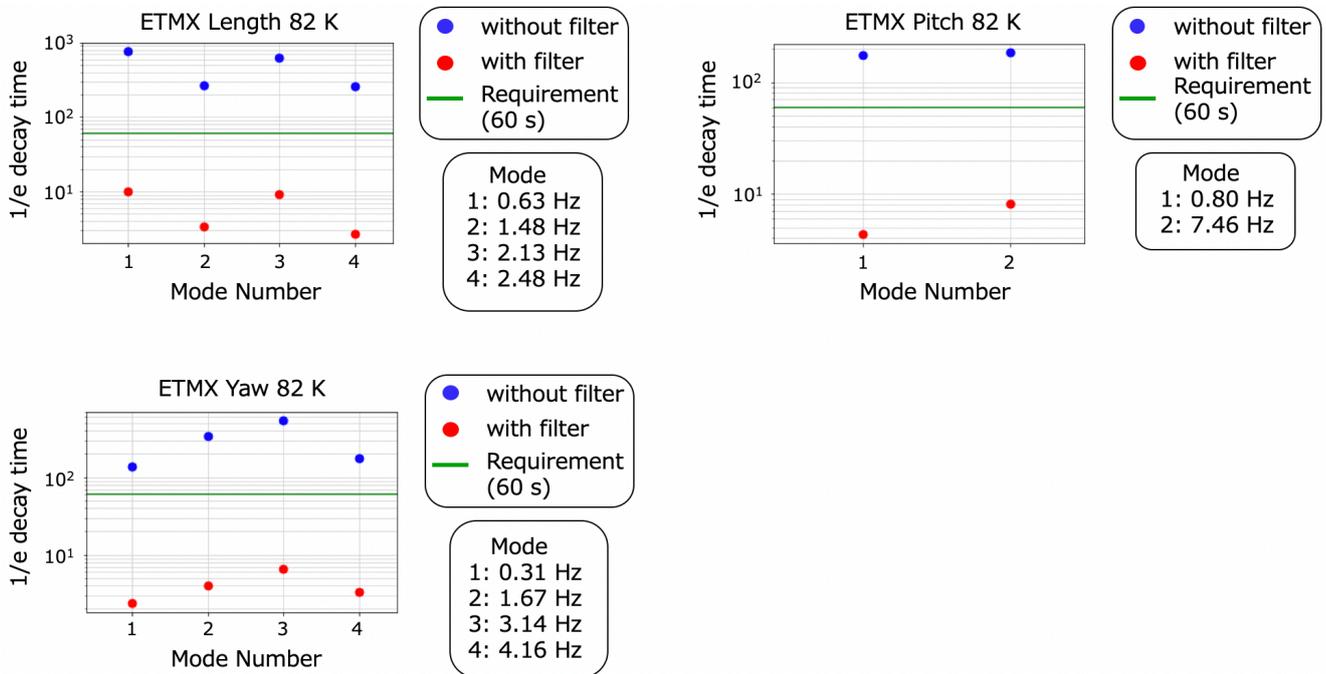


図 6.15 82 K におけるダンピングフィルタあり / なしの 1/e 減衰時間の比較 (ETMX). 青色, 赤色の点がそれぞれダンピングフィルタなし, ありの時の結果を示している. 297 K の場合の制御からゲインを変更しただけであるが, 要求に対して十分早く振動を抑えることができている, 冷却によってダンピング制御に大幅な変更を加える必要がないことが分かる.

	フィルタ	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
L	なし	$(7.569 \pm 0.070) \times 10^2$ s	$(2.629 \pm 0.008) \times 10^2$ s	$(6.312 \pm 0.009) \times 10^2$ s	$(2.555 \pm 0.004) \times 10^2$ s
	あり	$(1.014 \pm 0.097) \times 10^1$ s	3.366 ± 0.932 s	9.279 ± 0.433 s	2.683 ± 0.578 s
P	なし	$(1.745 \pm 0.004) \times 10^2$ s	$(1.839 \pm 0.002) \times 10^2$ s		
	あり	4.342 ± 0.017 s	8.057 ± 0.129 s		
Y	なし	$(1.377 \pm 0.007) \times 10^2$ s	$(3.414 \pm 0.003) \times 10^2$ s	$(5.373 \pm 0.002) \times 10^2$ s	$(1.754 \pm 0.001) \times 10^2$ s
	あり	2.377 ± 0.245 s	3.980 ± 0.232 s	6.555 ± 0.156 s	3.327 ± 0.063 s

表 6.9 1/e 減衰時間 (ETMX 82 K)

これより、297 K におけるダンピング制御のゲインを変えるだけで、82 K でも 60 秒以内に振動がおさまるという要求を十分満たすことができると言える。つまり、冷却に伴う懸架装置の特性の変化により、制御の大幅な変更の必要性は生じず、ゲインを調整するだけで良いことが分かった。

第7章

制御雑音の低減

7.1 制御雑音

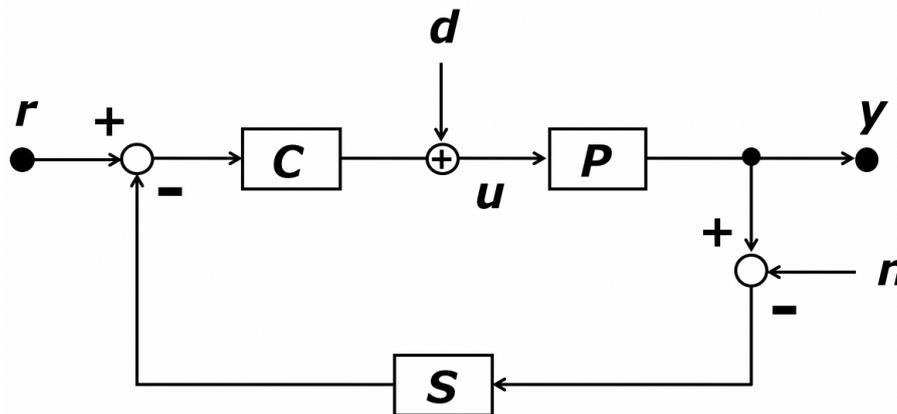


図 7.1 制御系には外乱と雑音が存在する. 図中の d は外乱, n は雑音, r は目標値, y は制御量を表す.

図 7.1 において, 一巡伝達関数を $T_{\text{loop}} = T_{\text{open}}S = CPS$ と書くと, 外乱 d から制御量 y , 雑音 n から制御量 y までの伝達関数はそれぞれ

$$T_{dy} \equiv \frac{y}{d} = \frac{P}{1 + T_{\text{loop}}}, \quad (7.1)$$

$$T_{ny} \equiv \frac{y}{n} = \frac{T_{\text{loop}}}{1 + T_{\text{loop}}}, \quad (7.2)$$

となる. また, 目標値 r から制御量 y の伝達関数を制御系の特性とすると, その値は

$$T_{ry} \equiv \frac{y}{r} = \frac{CP}{1 + CPS} = \frac{CP}{1 + T_{\text{loop}}}, \quad (7.3)$$

である. ここで, 制御対象が $P \rightarrow P + \Delta P$ となったとき, 制御系の特性の変動は

$$\Delta T_{ry} = \frac{\Delta P}{1 + C(P + \Delta P)S} \times \frac{T_{ry}}{P}, \quad (7.4)$$

となる。このとき微分感度は

$$S_0 = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta T_{ry}/T_{ry}}{\Delta P/P}, \quad (7.5)$$

と定義される。ただし、 $\frac{\Delta T_{ry}/T_{ry}}{\Delta P/P}$ は相対感度と呼ばれ、この値が 1 より小さい時は外乱に対して制御特性が変動しにくいことを意味している。

式 (7.4), (7.5) より、

$$S_0 = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\Delta P}{1+C(P+\Delta P)S} \times \frac{T_{ry}}{P} \right) / T_{ry}}{\Delta P/P} = \frac{1}{1+CPS} = \frac{1}{1+T_{loop}}, \quad (7.6)$$

と書くことができるので、式 (7.1) より

$$T_{dy} = S_0 P, \quad (7.7)$$

である。また、式 (7.2) から

$$S_0 + T_{ny} = 1, \quad (7.8)$$

と書ける。このとき、外乱の影響を小さくする、すなわち T_{dy} を小さくしようとすると式 (7.7) より、 S_0 も小さくなる。すると式 (7.8) より、 T_{ny} が大きくなる。

つまり、ダンピングフィルタをかけて振動を抑えようとする（＝外乱を抑えようとする）と雑音の影響が大きくなってしまう。また、逆に雑音を減らそうとすると外乱の影響が大きくなる。例えば S にローパス特性を持たせる（＝高周波帯において T_{loop} を小さくする）などしても、式 (7.6) より S_0 が大きくなるため、式 (7.7) より T_{dy} も大きくなるのである。

このように、ダンピング制御と雑音はトレードオフの関係にある。よって、低周波帯では振動減衰を、高周波帯では雑音低減を重視するというような制御がよく用いられる。

しかし、図 3.7 に示した Lock-acquisition Phase では FP 共振器を素早くロックすることが目標であるため、広い帯域で強い制御をかける必要がある。一方、Observation Phase においては安定な干渉計ロックを保持できるレベルの制御で十分であり、それよりも雑音の低減を目指すべきである。前回の観測 (O3GK) では懸架系の制御が Lock-acquisition Phase のままであったが、本研究では、Observation Phase における低雑音な制御を行うことを目標とした。以下の節でそれを述べる。

7.2 制御フィルタの変更

まず、Type-A suspension のうち、ETMY, ITMX, ITMY の 3 つに対して Observation Phase における制御フィルタ（以下 Observation フィルタ）を作成した。ここでは ITMX について実際のフィルタを示しながらその設計について記載する。

7.2.1 ITMX Length

まず L 方向について、フォトセンサの出力信号からダンピングしすぎている周波数がないか確かめた（図 7.2）。そして、そのスペクトルからどのくらいオーバードンピングしているかを見積もり、その分だけダンピングフィルタのゲインを下げた。さらに共振の位置にノッチフィルタを入れてピークを潰し、10 Hz 以上では 4 次の楕円ローパスフィルタによって、従来以上に急峻にゲインを落とした（楕円フィルタは同じ次数を持った他のフィルタに比べて、ゲインの変化が最も早いという特性を持つフィルタである）。その後 1 晩放置し、信号が発振しないことを確かめた。最終的なフィルタは図 7.3 の通りである。

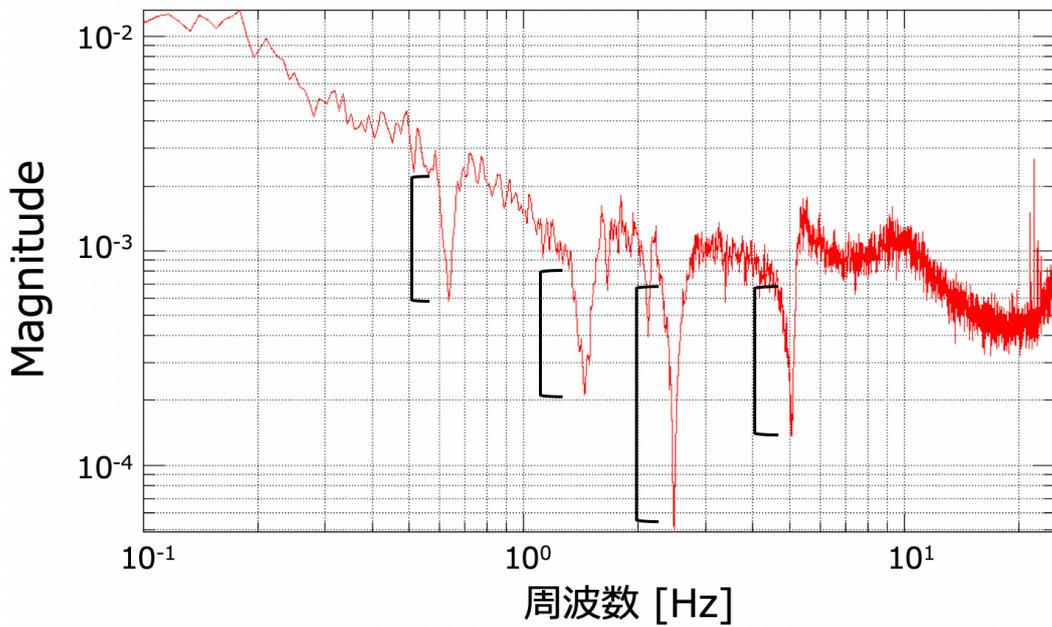


図 7.2 フォトセンサのエラー信号 (ITMX MN L). 落ち込んでいる部分が共振ピークでの揺れをダンピングしている箇所であり, エラー信号のレベルに対してどの程度小さくなっているかという値からオーバーダンピングの度合いを見積もっている.

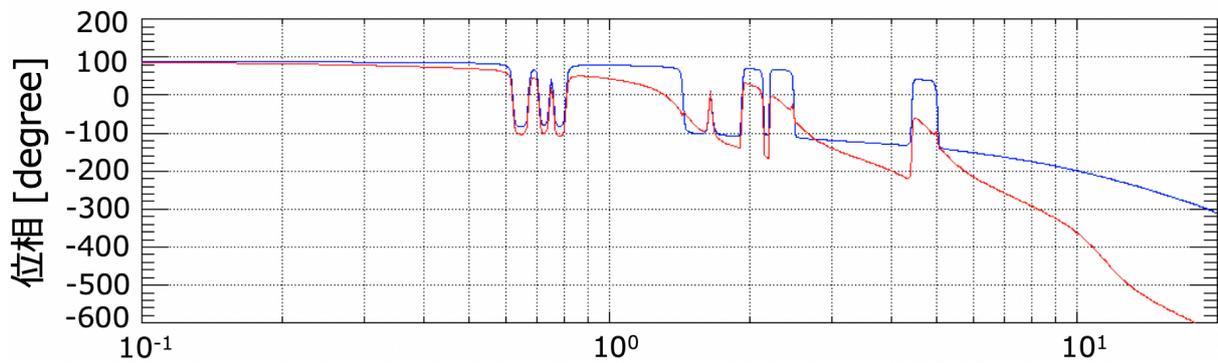
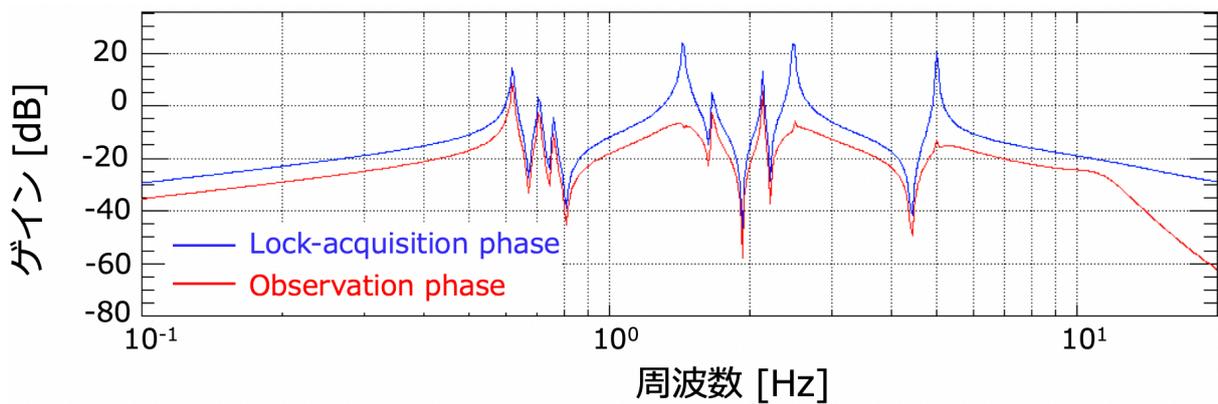


図 7.3 赤線が Observation フィルタ (ITMX L), 青線が Lock-acquisition phase で用いられるフィルタをかけた時の MN の応答を表す. Lock-acquisition phase で用いるフィルタよりもゲインを下げ, 共振ピークをノッチで潰した上, 10 Hz 以上では楕円フィルタによって急峻にゲインを下げていく.

7.2.2 ITMX Pitch

P, Y方向のフォトセンサのダンピング制御は Observation phase では完全にオフにし, OpLev を用いて制御を行う. これは P, Y 方向に関しては, OpLev を用いた方が制御雑音小さいことが分かっているからである.

L の場合と同様にしてゲインの下げ方を調べた. その結果 0.2 Hz 前後を UGF としてゲインを下げればよいことが分かった. そこで, UGF での位相の回りに注意しながら 0.4 Hz から 4 次楕円ローパスフィルタをかけた. さらに共振の位置にノッチフィルタを入れてピークを潰し, しばらく放置して安定であることを確かめた.

実際に設計したフィルタを図 7.4 に示す. 赤線が Observation フィルタを表しており, UGF は 0.191 Hz, そこでの位相余裕は 21° となっている.

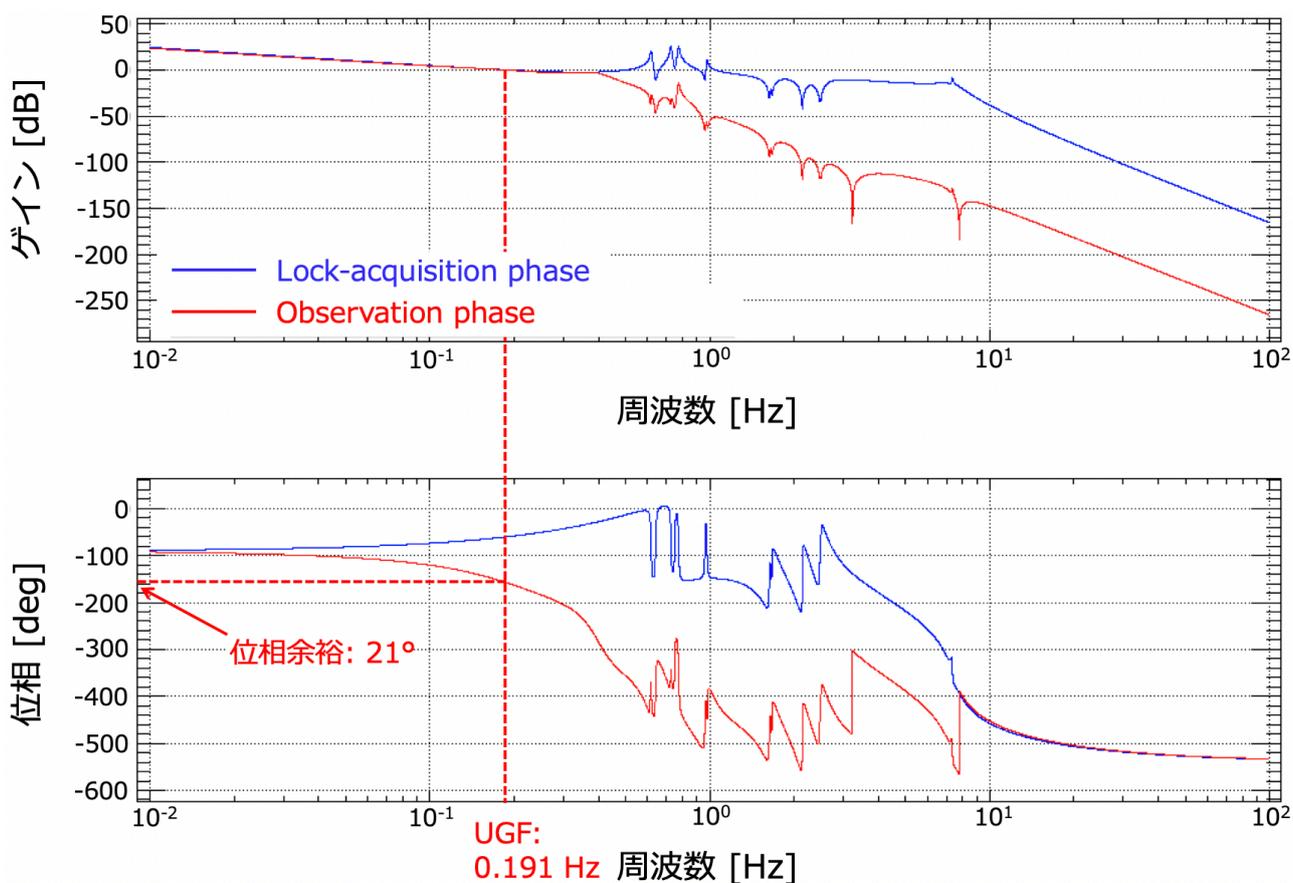


図 7.4 赤線が Observation フィルタ (ITMX P), 青線が Lock-acquisition phase で用いられるフィルタをかけたときの MN の応答を表す. なお, Observation フィルタについて, UGF は 0.191 Hz であり, そこでの位相余裕は 21° である.

同様の制御を ITMY, ETMY にも実装し, 制御雑音を測定した.

7.3 制御雑音の測定

7.3.1 測定方法

まず FPMI (第 2 章参照) をロックする. この FPMI において, 重力波信号は腕の差動信号であり, DARM 信号と呼ばれている. また, DARM 信号は図 7.5 において PD に向かって来るので, そこで取得される. その信号を用いて ETMX にフィードバック信号を返し, 腕の差動変異を保つように ETMX を駆動している.

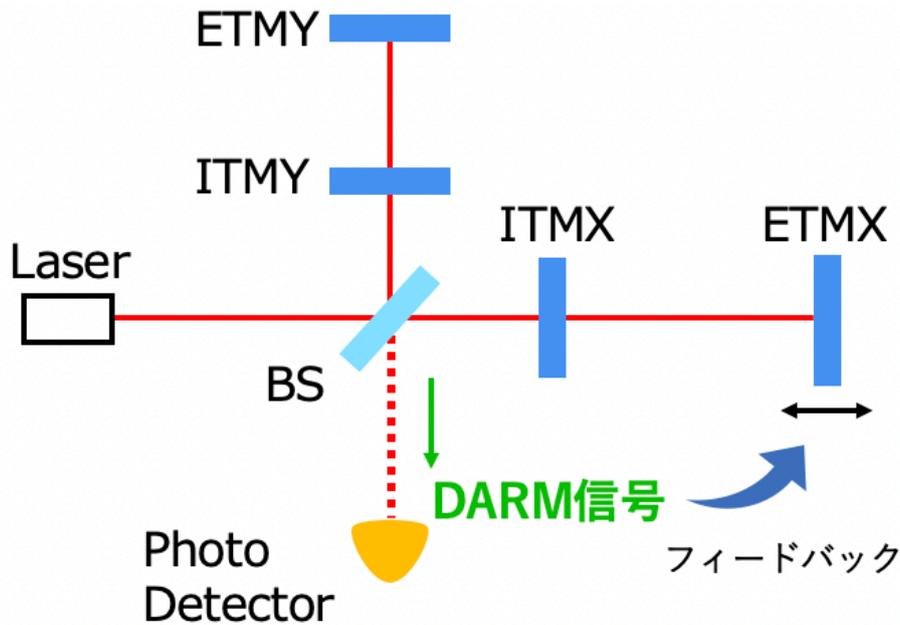


図 7.5 FPMI の構成と DARM 信号

次に, 制御雑音を測定するために, 各懸架装置を各自由度に振動させ, その動きから DARM 信号までの伝達関数を測定した. 測定した伝達関数の例を図 7.6 に示す.

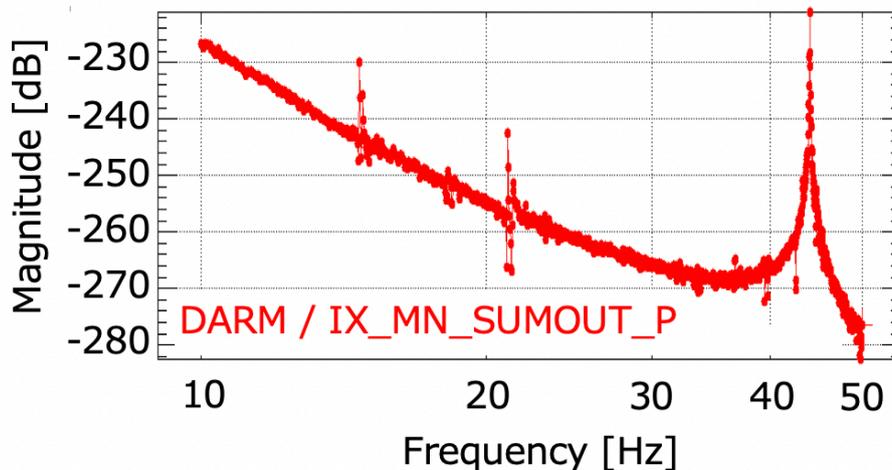


図 7.6 ITMX MN P の出力から DARM 信号までの伝達関数

懸架装置をこのように振動させていない時でも、制御に用いるセンサの雑音は常に存在している。そこで各自由度の出力の振幅スペクトル密度 (Amplitude Spectrum Density: ASD) S_{SUMOUT} を測定した伝達関数 $\text{TF}_{\text{SUMOUT}}$ にかけることによって、制御雑音を得られる。

$$N_{\text{control}} = \text{TF}_{\text{SUMOUT}} \times S_{\text{SUMOUT}}. \quad (7.9)$$

さらに、各懸架装置の制御雑音は無相関であるから、ETMX を除く Type-A suspension の制御雑音の 2 乗和を取ることで、全体の制御雑音を得られる。

$$N_{\text{control,all}} = \sqrt{N_{\text{control,ETMY}}^2 + N_{\text{control,ITMX}}^2 + N_{\text{control,ITMY}}^2}. \quad (7.10)$$

7.3.2 測定結果

作成した Observation フィルタを使用した場合と、しなかった場合について、式 (7.10) の計算をした結果を図 7.7 に示した。

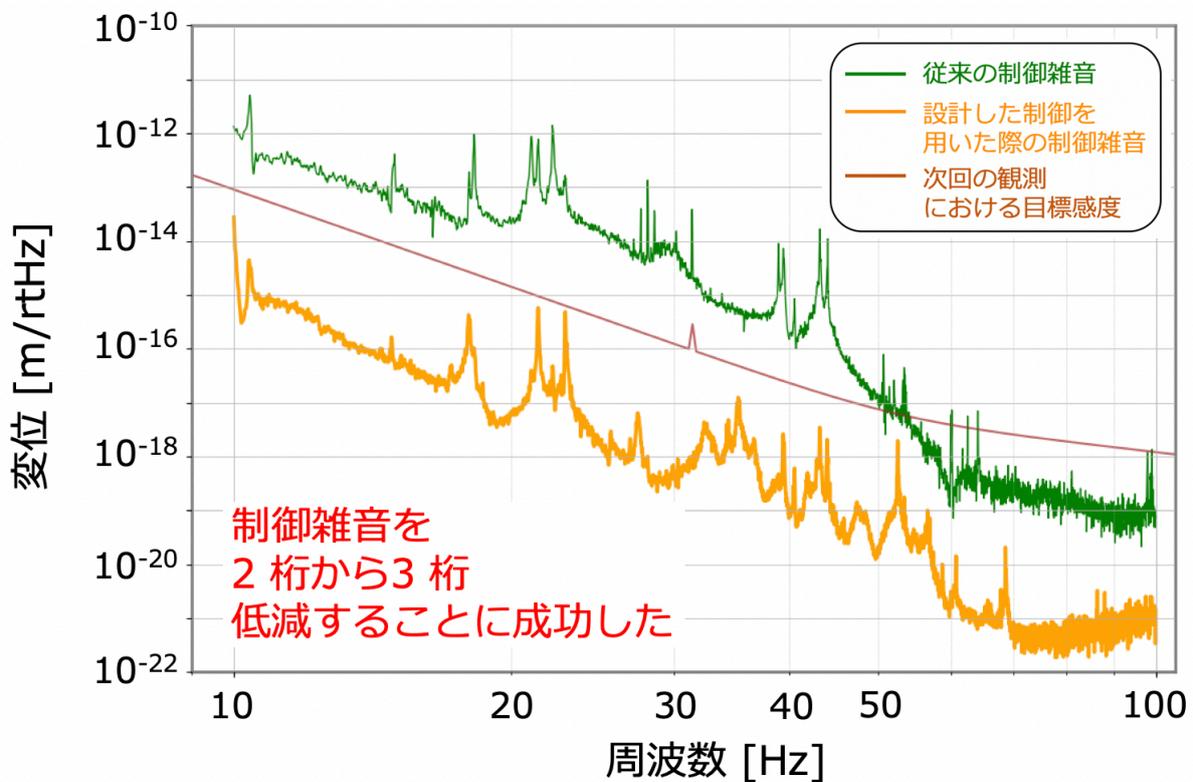


図 7.7 Observation フィルタの効果. Observation フィルタを用いることにより、低温懸架装置の制御雑音が 2～3 桁小さくなっており、これは O4a 観測における目標感度 (3 Mpc) と比べても小さい。

図中の緑線が Observation フィルタなしの場合、オレンジの線が Observation フィルタありの場合を示している。これより、Observation フィルタを使用することで、ETMX を除く低温懸架装置の制御雑音が 2～3 桁小さくなっているのが分かる。また、Observation フィルタを使用した場合の制御雑音は、O4a 観測 (Observation 4 の初めの段階) における目標感度 (3 Mpc) と比べても小さいと分かる。

さらに、図 7.8 に現在の FPMI の感度 (赤) と Observation フィルタありの場合の制御雑音 (オレンジ)、および各懸架装置の各自由度についての制御雑音を示した。これより、幅広い帯域で ETMY の Y に対する制御雑音が支配的であることが分かる。また、この図に示された懸架装置の違いによる制御雑音の差を埋めることは、今後の課題である。

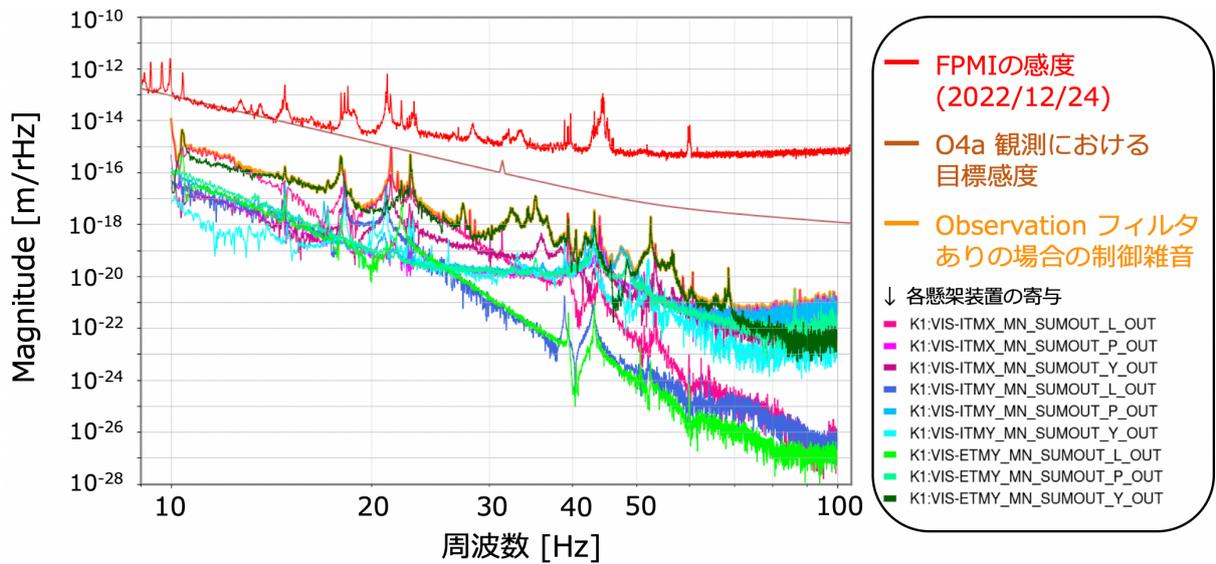


図 7.8 懸架装置, 自由度ごとの制御雑音. ETMY の Y に対する制御が最も大きな雑音を生んでいる.

なお, 現在 10 ~ 50 Hz において, まだ Observation フィルタを実装していない ETMX の制御雑音が他の低温懸架装置と比べて著しく大きいことは判明している (図 7.9). しかし, 本研究の成果より, ETMX に対しても同様の制御を実装すれば, O4 観測にとって十分なレベルまで制御雑音を低減可能であると推察される.

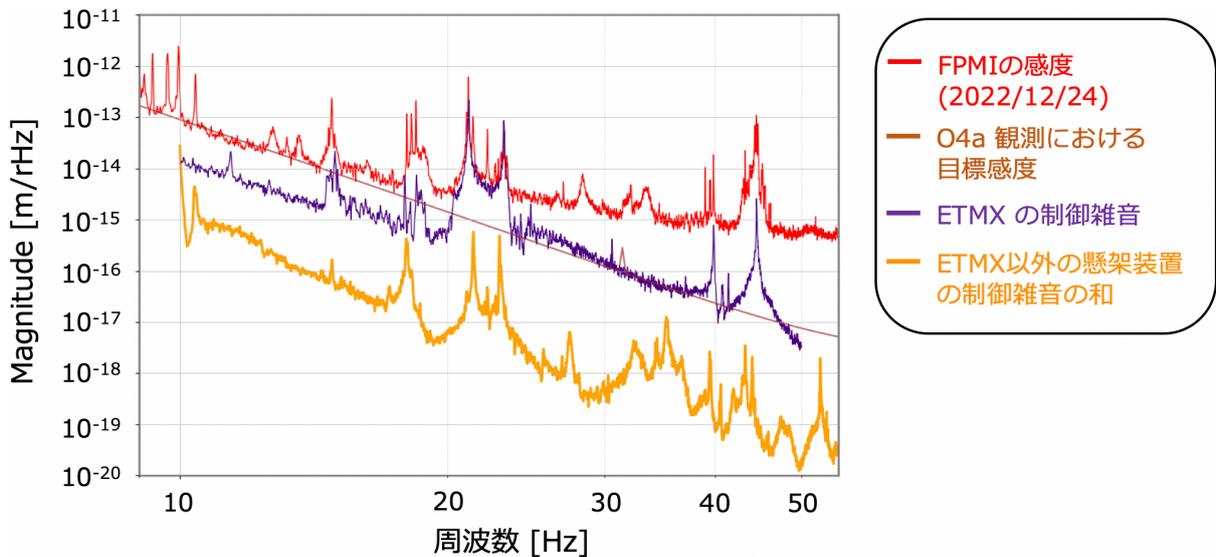


図 7.9 ETMX の制御雑音. 現在は ETMX の制御雑音が著しく大きい. しかし, 他の低温懸架装置と同様の制御を実装すれば, O4 観測に十分なレベルまで制御雑音を低減できると考えられる.

また, 新たに設計した制御を用いても FPMI が安定に動作するかどうかを確かめた. 図 7.10 はその時の干渉計の状態を示している. 図中の FPMI Locked は従来の制御フィルタを用いて FPMI をロックしている状態であり, Observation が低雑音制御に切り替えた状態である. 2023 年 1 月 4 日の 13 時 43 分に FPMI Locked から Observation に切り替え, 2023 年 1 月 5 日の 13 時 46 分までの約 26 時間, FPMI が安定に動作することが確かめられた. なお, 2023 年 1 月 5 日の 13 時 46 分に FPMI のロックを落としたのは, 干渉計作業のためであり, これは人為的なものである.

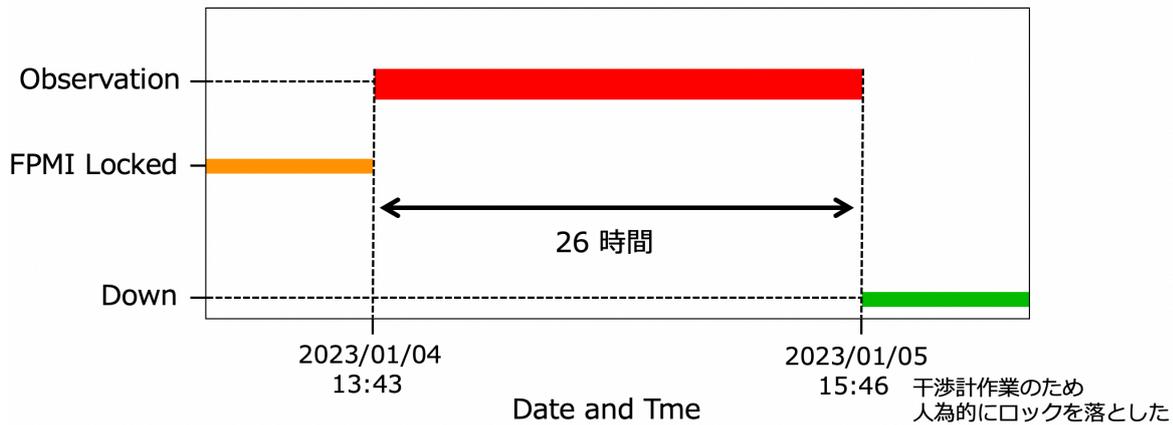


図 7.10 Observation フィルタを用いた際の FPMI の安定性. FPMI Locked, Observation はそれぞれ従来の制御, 新しく設計した制御を用いて FPMI をロックしている状態である. 2023 年 1 月 4 日の 13 時 43 分に FPMI Locked から Observation に切り替え, 人為的にロックを落とした 2023 年 1 月 5 日の 13 時 46 分までの約 26 時間, FPMI が安定に動作することを確認した.

7.4 制御雑音低減のまとめ

ETMY, ITMX, ITMY の低温懸架装置に対して制御雑音の低減を目指した Observation フィルタを作成し, 10 ~ 100 Hz において制御雑音を 2 ~ 3 桁低減することに成功した. 未実装の ETMX に対しても同様の制御を行うことにより, O4 観測における制御雑音低減の目標を完全に達成することが期待される. また, 新たに設計した制御を用いても FPMI を長時間安定に動作できることを確認した.

しかし, O5 観測では 128 Mpc が目標感度とされており, それを実現するためには低温懸架装置の制御雑音をさらに低減する必要がある. それを実現するためには様々なアプローチが考えられ, 例えば振動をモードごとに分解してそれらを独立に減衰させる手法などが考えられる. これにより, ダンピング性能と制御雑音の最適化が容易となり, 効率良く制御を行えるようになると期待できる [55]. あるいは, 現在ダンピング制御に用いられているフォトセンサよりも高性能なセンサの開発や, P や Y 方向のカップリングに関係するビームのアライメント技術を向上させるなども有効であると考えられる. これについては今後の研究で検討, 実装していく必要がある.

第 8 章

結論

8.1 結論

本研究では KAGRA のサファイア鏡を吊るした低温懸架装置の一つである ETMX について、82 K における特性を評価した。その結果、先行研究で行われた測定と同様、低温にするとフォトセンサの出力が 1.8 倍大きくなることが分かった。一方で、MN 段と IM 段で用いられる 12 個のセンサの出力の範囲は、82 K において平均値に対して 32% のばらつきがあることが新たに分かった。この結果はばらつきの範囲が 50% 以下におさまる必要があるという KAGRA での要求値を満たす。しかし、冷却することによって出力にばらつきの範囲が徐々に大きくなるという結果も得られているため、今後冷却が進んでも要求を満たすかどうかは、注意して確認する必要がある。また、ETMX の機械的な共振周波数およびその伝達関数の低温にした際の変化量を測定した。その結果、冷却に伴う特性の変化は軽微で、制御系に大きな変更を加える必要がないことを確かめた。

また、低温懸架装置の共振周波数では、サファイア鏡に伝わる地面の振動が増幅されてしまうので、その振動を抑える必要がある。そこで、懸架装置の変位をフォトセンサで検知し、速度に比例した力をアクチュエータを通じて鏡にフィードバックするというダンピング制御を全ての低温懸架装置に対して行った。そして、そのダンピング制御が共振周波数における振動を 60 秒以内に減衰させるという要求を満たすものであることを確認した。これにより、外乱などで干渉計のロックが失われた場合でも速やかに再ロックすることが可能となり、観測時間の増加につなげることができる。

さらに、2020 年 3 月の O3GK では低温懸架装置の制御雑音が 10 ~ 50 Hz における感度を制限していたことを踏まえ、ETMX 以外の低温懸架装置に対して観測時に用いる低雑音な制御フィルタを新たに設計した。その結果、10 ~ 50 Hz において、新たに設計した制御フィルタの制御雑音が既存のフィルタの制御雑音と比べて 2 ~ 3 桁低減することを確認した。また、その制御を用いても FPMI が安定に動作することを確認した。

8.2 今後の展望

2023 年 3 月からの O4 観測に向けて、ETMX はさらに冷却される。冷却が進んだ際は特性評価を全ての低温懸架装置に対して行い、冷却したことによるフォトセンサのばらつきの程度や制御の変更の必要性を検討し、必要なら改良を行う。また、冷却が進んでおらず、低温化に伴う特性評価の対象としなかった ETMX 以外の低温懸架装置も今後冷却されるため、同様の特性評価を行う予定である。制御雑音については、本研

究で設計した新しい制御が未実装の ETMX に対しても同様の制御を行うことにより、10 ~ 50 Hz における KAGRA の感度の向上に貢献する。

また、O5 観測では 128 Mpc を目標感度としており、さらなる感度の向上が必要となる (図 8.1)。そこで、低温懸架装置の振動をモードごとに分解してそれらを独立に減衰させることを考える。これにより、精密な数値シミュレーションに基づいて、ダンピング性能と制御雑音の最適化が容易になり、効率良くダンピングを行えるほか、懸架装置ごとの制御雑音の違いについてもより詳細に分析してその雑音の低減を達成できると考えられる。他にも高性能な低温センサを開発するなど、さまざまな観点から制御雑音の低減を図る。これによって、低周波における感度を向上してインスパイラルフェイズの重力波を詳細に観測し、中性子星の質量をより正確に得ることを目指す。こうして得られた中性子星の質量は、合体フェイズ以降の重力波から得られる中性子星の構造情報と合わせることで、中性子星物質の状態方程式に制限をつけることができる。これは天文学や宇宙物理学、さらには原子核物理や素粒子物理など幅広い分野の発展につながる事が期待される。

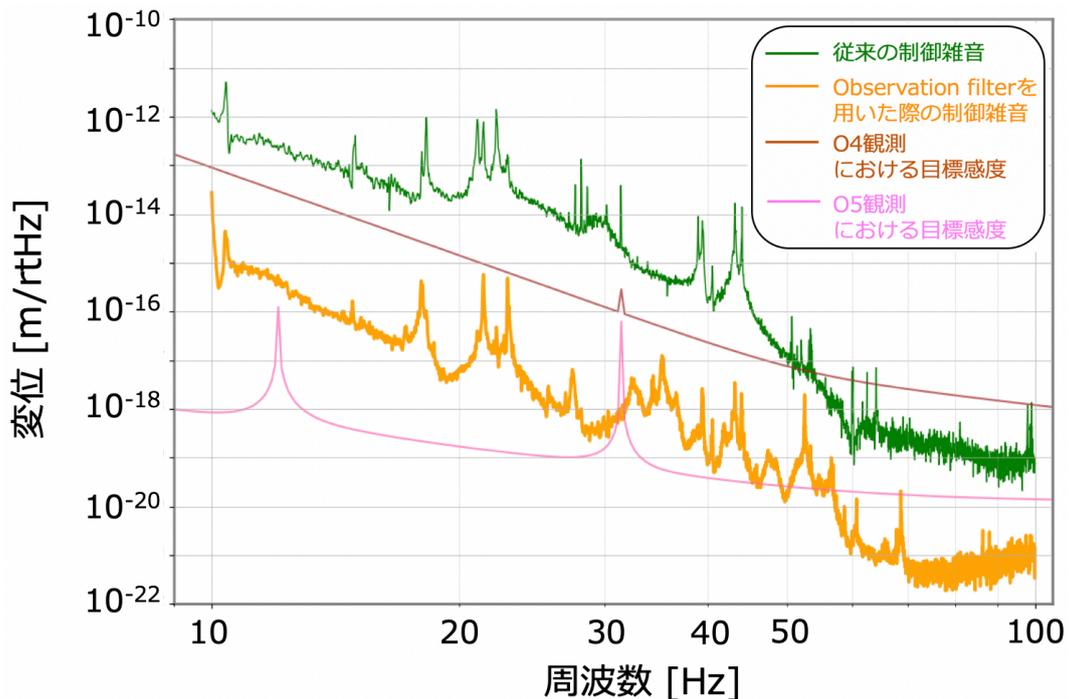


図 8.1 O5 観測での目標感度と現在の制御雑音。ピンクの線は O5 での目標感度である 128 Mpc を示している。この感度を達成するためには、10 ~ 50 Hz において制御雑音を 1 ~ 3 桁程度低減する必要がある。そこで、精密な数値シミュレーションに基づくモーダルダンピングなど、様々な観点で制御雑音の低減、感度の向上を目指す。

補遺 A

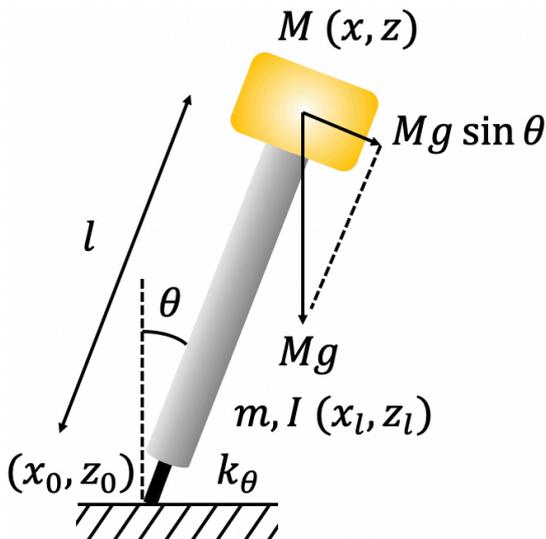
反バネ効果による低周波防振

重力波観測帯域における防振には第 3 章で述べたように多段振り子を用いる方法と、振り子の共振周波数をより低周波にする方法がある。この内、後者を実現するために KAGRA では Inverted Pendulum (IP: 倒立振り子) と Geometric Anti-Spring (GAS) フィルタを用いている。これらは反バネ効果（一度変位するとその平衡点から遠ざかろうとするシステム）により振動子の有効バネ定数を低減し、また低い共振周波数を持ちながら、コンパクトな設計となっている。補遺 A では主にそれらの動作原理を詳記する。

A.1 IP

A.1.1 動作原理

IP（倒立振り子）は共振周波数を 0.1 Hz 以下に調整することができる、水平方向の機械振動子である。これにより、微小地面振動のピーク周波数（0.2~0.5 Hz）において 1 桁程度の減衰を得ることができる。



M	: おもりの質量
(x, z)	: おもりの位置
m	: IPの脚の質量
I	: IPの脚の慣性モーメント
l	: IPの脚の長さ
(x_l, z_l)	: IPの脚の位置
θ	: IPの脚と垂直軸の角度
k_θ	: フレクシャの回転バネ定数
(x_0, z_0)	: フレクシャの固定点

図 A.1 IP の動作原理

IP は地面に固定されたフレクシャ, その上に接続された剛性の高い円柱状の脚, および脚の上部にあるおもりから構成される. その簡単なモデルと各パラメタを図 A.1 に示した.

この系のラグランジアン L , 運動エネルギー K , ポテンシャルエネルギー U を計算すると

$$L = K - U, \quad (\text{A.1})$$

$$K = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_l^2 + \dot{z}_l^2) + \frac{1}{2}I\ddot{\theta}^2, \quad (\text{A.2})$$

$$U = Mgz + mgz_l + \frac{1}{2}k_\theta\theta^2, \quad (\text{A.3})$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} x_l &= \frac{1}{2}(x + x_0) \\ z_l &= \frac{1}{2}z, \\ x &= l \sin \theta + x_0 \\ z &= l \cos \theta \end{aligned}, \quad (\text{A.4})$$

という条件を考える.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l\dot{\theta} \cos \theta + \dot{x}_0 \\ \dot{z} &= -l\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}, \quad (\text{A.5})$$

であることに注意すると K および U は

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{8}m(\dot{x} + \dot{x}_0)^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{\dot{x} - \dot{x}_0}{l}\right)^2, \quad (\text{A.6})$$

$$U = Mgl \cos\left(\frac{x - x_0}{l}\right) + \frac{mgl}{2} \cos\left(\frac{x - x_0}{l}\right) + \frac{1}{2}k_\theta\left(\frac{x - x_0}{l}\right)^2. \quad (\text{A.7})$$

よって Euler-Lagrange 方程式は 1 次近似で

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (\text{A.8})$$

$$\left(M + \frac{m}{4} + \frac{I}{l^2}\right)\ddot{x} + \left(\frac{m}{4} - \frac{I}{l^2}\right)\ddot{x}_0 = -\left[\frac{k_\theta}{l^2} - \left(M + \frac{m}{2}\right)\frac{g}{l}\right](x - x_0). \quad (\text{A.9})$$

式 (A.9) は有効バネ定数が

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_\theta}{l^2} - \left(M + \frac{m}{2}\right)\frac{g}{l}, \quad (\text{A.10})$$

である調和振動子の運動方程式とみなすことができる. ここで, 式 (A.10) の右辺の第 1 項は弾性復元力を表している. 一方, 第 2 項は調和振動子の剛性を減少させる斥力 (重力反バネ力) を示している. この力はおもりと IP の脚の質量に比例するので, IP 上のおもりの質量を変えることで有効バネ定数を調節することができる.

しかし, 復元力と斥力を完全に打ち消すと, 系は単一の平衡点を持つ振動系ではなくなってしまう. 各パラメタを表 A.1 の通りに仮定すると式 (A.7) より, さまざまな荷重をかけたときの IP のポテンシャルエネルギーは図 A.2 のようになる.

m	3 kg
l	2 m
k_θ	700 N/rad

表 A.1 IP の脚の質量, 長さおよびフレクシャの回転バネ定数. ここでは IP の値として適当かつ計算する上で平易な値を定めた.

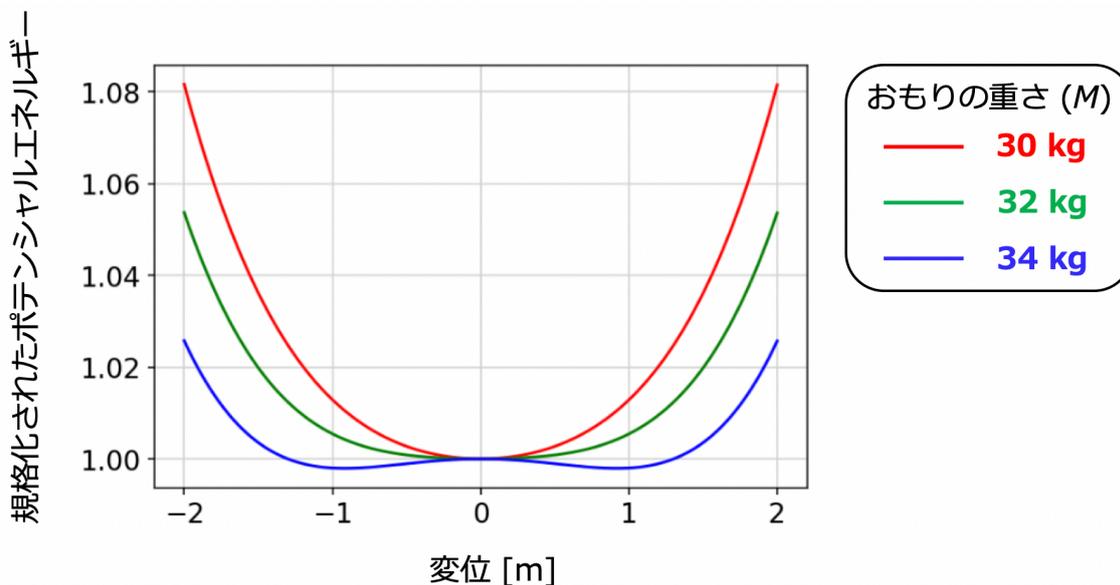


図 A.2 おもりの質量を変えたときの IP のポテンシャルエネルギー

IP に十分な荷重がかかっていない場合, そのポテンシャルエネルギーは式 (A.7) の第 3 項が支配する放物曲線に近似することができる. 荷重が大きくなると, ポテンシャル曲線は平衡点 $x = x_0$ を中心に平坦になり, 臨界荷重を超えると式 (A.7) の第 1 項が大きくなって, 系は 2 つの平衡点を持つ双安定性を示すようになる. IP を安定に動作させるためには, 有効バネ定数が正の値になるように荷重を小さくする必要がある.

IP が平衡点を 1 つだけ持つ安定な状態において, IP の共振周波数は式 (A.10) より,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{eff}}}{M + \frac{m}{4} + \frac{I}{l^2}}}, \quad (\text{A.11})$$

となる. これより, 共振周波数の荷重依存性は図??のようになる. IP にかかる荷重を増加させると共振周波数は徐々に低下し, 最後に急激に低下して系は不安定になることが分かる.

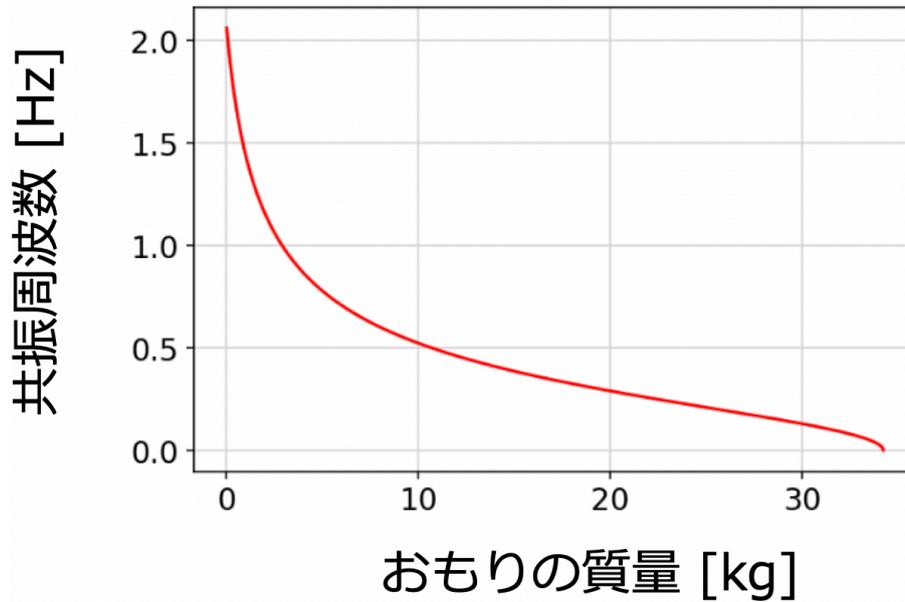


図 A.3 おもりの質量を変えたときの IP の共振周波数の変化

A.1.2 減衰性能

IP の脚が均一な質量分布だと仮定すると、地面からおもりへの伝達関数は

$$H_{\text{IP}}(\omega) = \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}_0}. \quad (\text{A.12})$$

ここで、Euler-Lagrange 方程式 (A.9) より

$$\left[k_{\text{eff}} - \left(M + \frac{m}{4} + \frac{I}{l^2} \right) \omega^2 \right] \tilde{x} = \left[k_{\text{eff}} - \left(\frac{m}{4} - \frac{I}{l^2} \right) \omega^2 \right] \tilde{x}_0, \quad (\text{A.13})$$

なので

$$H_{\text{IP}}(\omega) = \frac{k_{\text{eff}} - \left(\frac{m}{4} - \frac{I}{l^2} \right) \omega^2}{k_{\text{eff}} - \left(M + \frac{m}{4} + \frac{I}{l^2} \right) \omega^2} = \frac{A + B\omega^2}{A - \omega^2}. \quad (\text{A.14})$$

ただし、

$$A = \frac{k_{\text{eff}}}{M + \frac{m}{4} + \frac{I}{l^2}}, \quad B = \frac{\frac{m}{4} - \frac{I}{l^2}}{M + \frac{m}{4} + \frac{I}{l^2}}, \quad (\text{A.15})$$

である。ここで、 $H_{\text{IP}}(\omega)$ の振幅を周波数の関数として描くと図 A.4 のようになる。ある周波数までは理想的なバネと同様であるが、高周波数で減衰性能が飽和するのが分かる。これは式 (A.12) に示した係数 B によるものである。

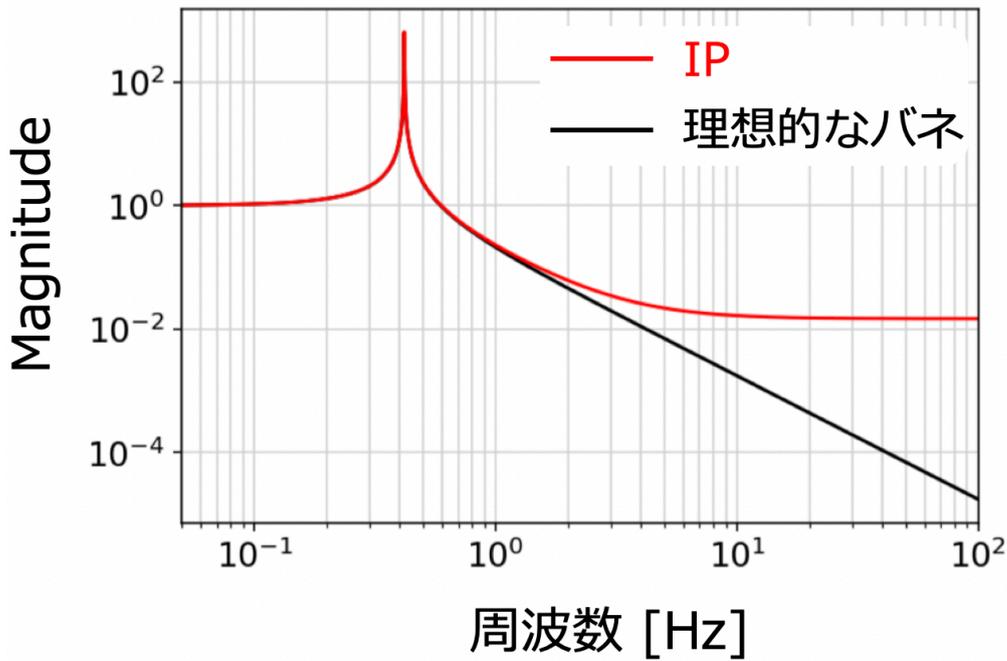


図 A.4 地面の運動から IP のおもりまでの伝達関数. 黒線は理想的なバネの場合である.

係数 B による飽和状態は, 物理的には打撃中心効果 [56] による脚部からおもりへの運動量伝達である. 剛体に衝撃的な力を加えると, 図 A.5 に示すように, 打撃によって剛体はその重心の移動と重心周りの回転の両方で加速される. このとき, 並進と回転が相殺され, 正味の初速度がゼロになる点が存在する. この点をピボットポイント, あるいはスイートスポットと呼び, 衝動の瞬間的な回転中心と見なすことができる. なお, ピボットポイントの位置は物体の質量分布によって決まる.

ピボットポイントは重心の反対側に打撃中心点 (CoP, Center of Percussion) を持つ. ここで, CoP に垂直な打撃を加えても, それに対応するピボットポイントには反作用の力が発生しない. CoP とピボットポイントの質量中心からの距離 r_f と r_p は

$$r_f r_p = \frac{I_{\text{body}}}{M_{\text{body}}}, \quad (\text{A.16})$$

で表される [56]. ここで, M_{body} と I_{body} はそれぞれ物体の質量と慣性モーメントである. この関係から重心の反対側に衝撃が加わると, CoP とピボットポイントの位置が入れ替わることが分かる.

IP の脚の場合, 一端がおもりに接続され, もう一端がフレクシャを介して地面に固定されているため, 自由に回転できないという機械的制約がある. これにより, IP は低周波で共振する調和振動子のような振る舞いをする. しかし, 周波数が高くなるとこの制約は弱くなり, IP の脚はピボットポイントを中心に自由に回転することができるようになる. 脚からおもりへの運動量伝達を低減するためには, IP の脚の上端に相当する CoP の位置を, 外力 (地面の運動) が加わるフレクシャの足と一致させる必要がある. これにより IP の脚はおもりに力を与えることなく, その上端を支点として回転することができる.

前述の通り, CoP の位置 (ピボットポイントの位置) は剛体の質量分布に依存するため, IP の脚の下部にカウンターウェイトを追加することで CoP の位置を調整している (図 A.6). カウンターウェイトはおよそ 1~2 桁の飽和レベルの緩和が可能であり, 例えば Advanced LIGO 用に開発された HAM-SAS の IP はカウンターウェイトなしで $\sim 10^{-3}$ の減衰, カウンターウェイトありでは $\sim 10^{-5} \sim 10^{-4}$ の減衰を達成した. 図 A.7 にカウンターウェイトの導入による防振比の飽和レベルの改善を示す.

CoP (打撃中心点)

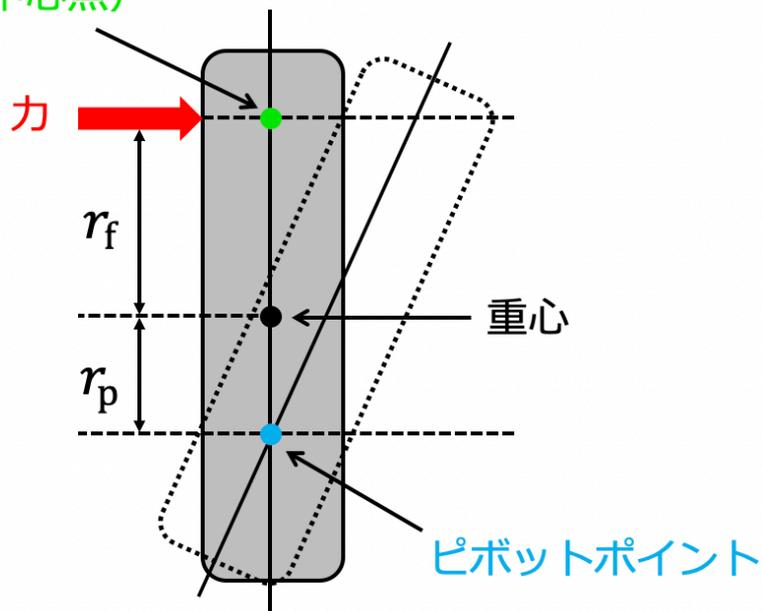


図 A.5 CoP (Center of Percussion) の図. 剛体は重心から外れた箇所に衝撃力を受けると, 重心の並進と重心周りの回転の両方で瞬間的な加速度を持つ. このとき, 並進と回転が打ち消しあって正味の初速がゼロになる点 (ピボットポイント) が存在する. CoP は重心に対してピボットポイントの反対側に位置する補点である. つまり CoP とは, 与えられたピボットポイントにおいて垂直方向の衝撃による反力が発生しないような点である.

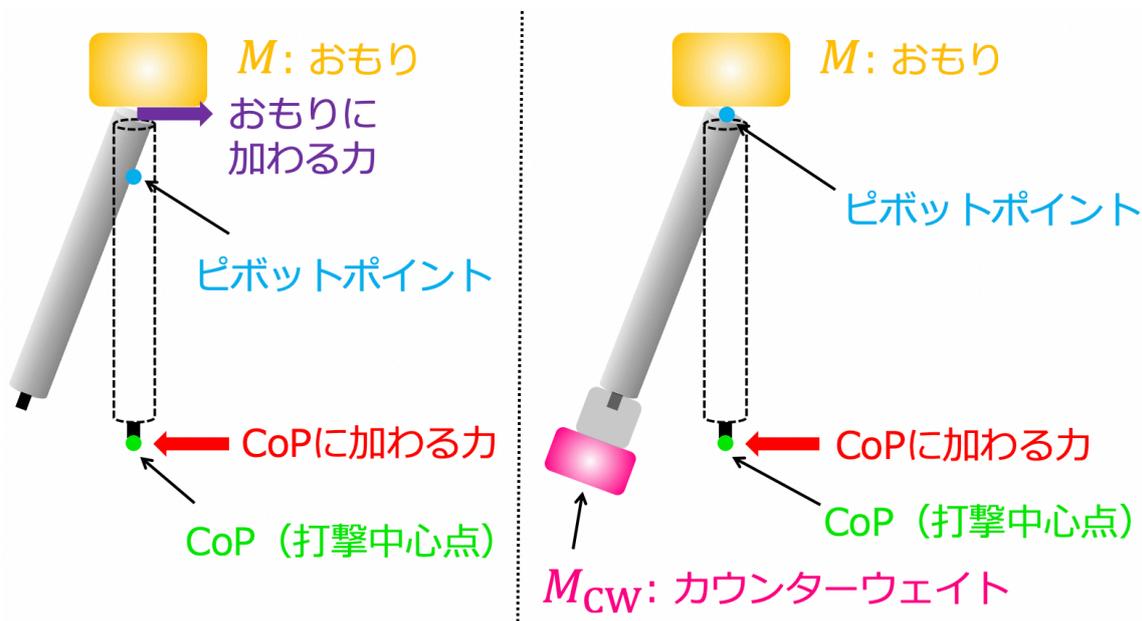


図 A.6 カウンターウェイトを設置したものとそうでないものの比較図. 一般に, 下部のフレクシャ部分に位置する CoP と相補的なピボットポイントは, ペイロードの連結部とは一致しない. このため, カウンターウェイトを脚の下部に設置することで, ピボットポイントを上部の連結部と一致させ, おもりに力をかけずに IP の脚を回転させ, 地面からの分離性能を向上させている.

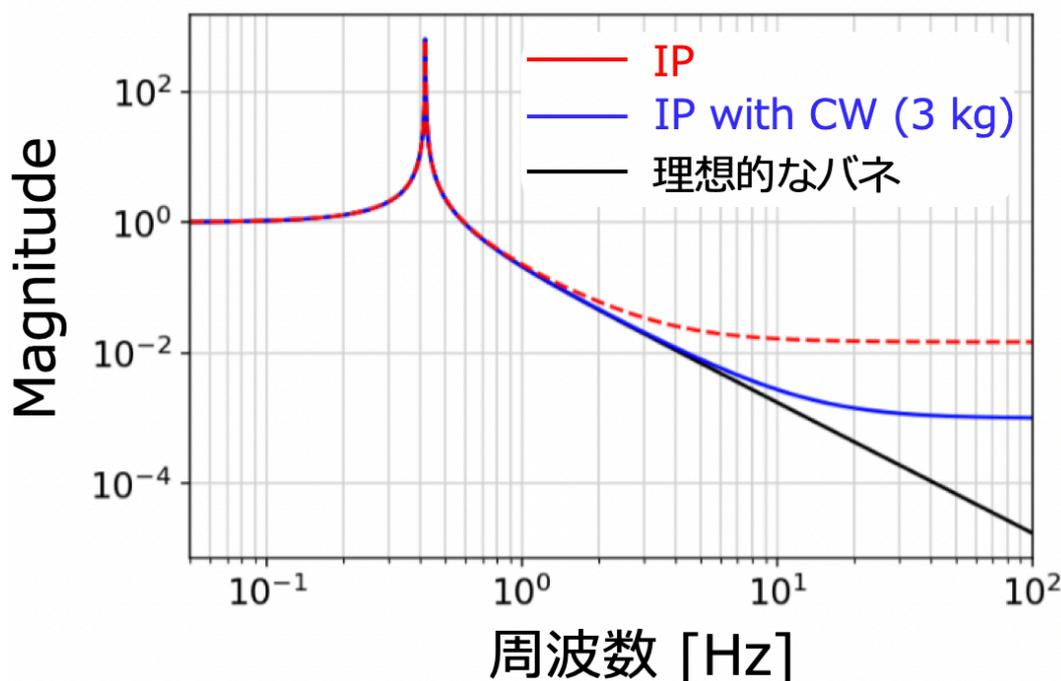


図 A.7 カウンターウェイトの質量を変えたときの IP の防振比. カウンターウェイトにより, 飽和レベルが 1~2 桁向上していることが分かる.

A.2 GAS フィルタ

低周波において, 垂直方向の防振を実現するためには柔らかいバネを用いる必要があるが, そのバネは懸架系の重量を支えられるものでなくてはならない. そこで Virgo では Super Attenuator に磁気反バネ技術を導入していた. これは同じ磁極を持つ永久磁石を水平面内で向かい合わせ, その反発力を用いるものである. 磁石が垂直方向に変位した時に反発力が垂直方向に伝わり, それがバネの反発力となって垂直バネの剛性を低下させる. しかし, 磁場の強さは温度に強く依存するため, 温度変化に伴って共振周波数がずれてしまう. さらに, 永久磁石やセンタリングに使う装置の影響で余計な機械的共振が誘発され, 観測帯域における防振性能が低下するという問題もあった.

この磁気バネを改良したものが GAS (Geometric Anti-Spring) フィルタである¹. これは 2 等辺三角形の板ばねを頂点で結合し, 3 方向から均等に圧縮する機械振動子であり, 低周波の垂直共振を約 0.3 Hz で抑えることができる. これにより防振性能が向上しただけでなく, 熱安定性やより簡素な機構が得られた. 以下ではその動作原理や機械的特性について述べる.

A.2.1 動作原理

GAS フィルタの構造は 4.1.1.2 で示した通りであり, 準三角形の板バネがその頂点で互いに圧縮しながら接続されている. この圧縮により垂直変位に対して反発力が生まれるのである.

ここで, 垂直バネと水平バネの組み合わせで懸架系を支えて互いに圧縮するシステムとして GAS フィルタをモデル化する (図 A.8). ここで, 板バネが放射状に, かつ対称に設置されているため, 圧縮に対する反力の水平成分は消失し, キーストンは垂直方向のみに動くよう拘束されている.

¹ Geometric Anti-Spring の名称は, 反バネが板バネの特定の形状によって実現されていることを表している.

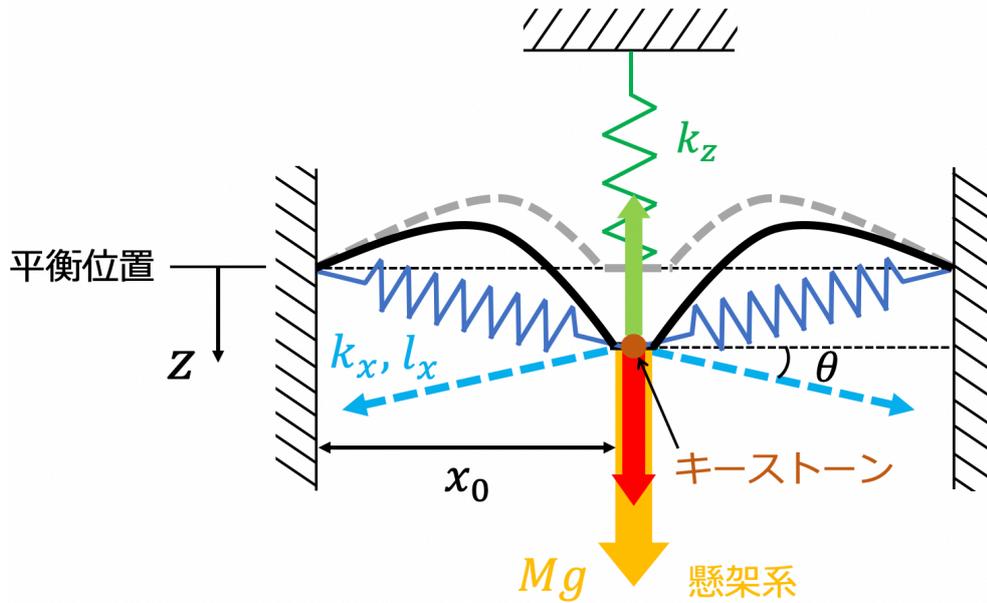


図 A.8 GAS フィルタの概略図. 1 組の板バネが互いに圧縮され、キーストン（茶）を支えている. この系は通常の垂直バネ（緑）と圧縮された水平バネ（青）の組み合わせでモデル化することができる. キーストンが変位すると、圧縮に対する反力の水平成分は互いに打ち消し合い（水色の点線矢印）、 z 軸に沿った正味の反発力（赤の矢印）が残る. 結果としてキーストンの剛性は、垂直バネと正味の水平バネの寄与の合計となる.

GAS フィルタのキーストンが平衡位置 $z = z_{\text{eq}}$ にあるとき Mg (M :懸架系の質量) とバネの力が釣り合っており、水平バネは z 軸に直交 ($\theta = 0$) して、最も圧縮される. キーストンが平衡状態から変位すると運動方程式は

$$M\ddot{z} = -k_z(z - z_{\text{eq}}) - k_x(l_x - l_{x0}) \sin \theta. \quad (\text{A.17})$$

ここで k_z, k_l はそれぞれ垂直、水平バネのバネ定数であり、 l_x, l_{x0} は水平バネの位置およびその元の位置である. z_{eq} の周りで式 (A.17) を z の 1 次で展開すると、以下のように線形化できる.

$$M\ddot{z} = \left[k_z - \left(\frac{l_{x0}}{x_0} - 1 \right) k_x \right] (z - z_{\text{eq}}) = -k_{\text{eff}}(z - z_{\text{eq}}). \quad (\text{A.18})$$

ここで、 x_0 はキーストンと水平バネの支点の水平距離であり、また有効バネ定数は

$$k_{\text{eff}} = k_z - \left(\frac{l_{x0}}{x_0} - 1 \right) k_x, \quad (\text{A.19})$$

とした. 水平ばねが圧縮されているとき ($x_0 < l_{x0}$)、垂直方向に反発力が発生するため有効バネ定数は垂直バネのバネ定数 ($k_{\text{eff}} < k_z$) より小さくなる. これが、GAS スプリングのアンチスプリング効果の原理であり、ブレードの圧縮を大きくする (x_0 を小さくする) ことで実効剛性と共振周波数を小さくすることができる.

A.2.2 減衰性能

基準フレームの垂直変位からキーストンへの GAS フィルタの伝達関数は、IP の場合と同じ式 (A.13) で表される. GAS フィルタの場合も CoP 効果によって減衰性能は高周波数で飽和し、一般に $\sim 10^3$ が限界となる [57]. しかし、マジックワンド (図 4.3) を追加することで減衰レベルを 10^4 まで向上させることができる.

A.2.3 熱ドリフト

GAS フィルタは水平圧縮力と板バネの固有垂直剛性による反バネ効果のバランスを取ることで、大きな柔軟性を得ている。この柔軟性により、懸架系の質量やバネの物性のわずかな変化に対して、キーストンの垂直位置が変動する。特に、バネの材質のヤング率の温度依存性による熱ドリフトは、GAS フィルタを運用する上で大きな問題となる。

GAS フィルタの動作点に懸架系の質量 M で釣り合った場合、その位置にキーストンを保つための最適荷重は、温度変化により次のようにずれる。

$$\Delta M \approx \frac{M}{E} \frac{\partial E}{\partial T} \Delta T. \quad (\text{A.20})$$

ここで、 E はバネの材質のヤング率であり、 ΔT は温度変化である。小さな摂動の場合、この変化はキーストンに追加される力 $\Delta F = \Delta M g$ と等価である。この系は有効バネ定数 k_{eff} を持つので、熱変化による変位は

$$\Delta z = \frac{\Delta F}{k_{\text{eff}}} = \frac{g}{E \omega_0^2} \frac{\partial E}{\partial T} \Delta T. \quad (\text{A.21})$$

ここで、GAS フィルタの共振周波数は ω_0 に調整されているため、有効バネ定数は $k_{\text{eff}} = M \omega_0^2$ として計算される。反バネ効果により共振周波数が低下すると、系は温度変化に対してより敏感になる。典型的なパラメタを用いた場合、温度依存性は

$$\frac{\Delta z}{\Delta T} = 0.69 \text{ [mm/K]} \left(\frac{0.33 \text{ Hz}}{\omega_0 / 2\pi} \right)^2 \left(\frac{\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial T}}{3.0 \times 10^{-4} \text{ [1/K]}} \right), \quad (\text{A.22})$$

となる。

補遺 B

Optical Lever

OpLev (Optical Lever) は, 反射面の角度変位を測定するために使用され, 光源, 鏡, ビーム位置検出装置から構成される. また, KAGRA では, OpLev で使用するビームは L 方向の変位を測定するためにも使用することができる. これは, 凸レンズの後ろにあるビームの位置を感知することで行われる. 一般に OpLeV とは装置全体の中で角度を感知する部分を指すが, KAGRA では L・P・Y の 3 つの変位を感知する装置全体を OpLev と呼ぶ.

本論文の主な対象である低温懸架装置では OpLev によって絶対角度変位, 絶対水平変位を測定している. 以下では OpLev を用いた鏡の L, P, Y の変位の測定原理を記した後, KAGRA の低温懸架装置における OpLev の構成について述べる.

B.1 OpLev を用いた鏡の変位の測定原理

最も単純なのは図 B.1 に示したように, 鏡が θ 回転した場合である. このとき, 入射面に沿ったビーム位置 x_1 は角度変位 θ を用いて

$$x_1 = (2r)\theta, \quad (\text{B.1})$$

と書ける. ここで, r は OpLev のアーム長 (反射面と受光面の距離) である.

また, 図 B.2 に示したようにビームが入射角 α を持つ場合, 鏡の L 方向の変位を測定することができる. このときのビーム変位は

$$x_1 = (2r)\theta + (2 \sin \alpha)x_L, \quad (\text{B.2})$$

となる. ここで, x_L は鏡の L 方向の変位である. この式は, 角度変位と L 方向の変位がカップルしていることを示す.

また直前のカップリングを分離するために凸レンズを挿入することで, そのカップリングを分離することができる. 図 B.3 に示すように焦点距離 f の凸レンズの後方のある距離 d でのビーム変位 x_2 を測定する第 2 のセンサーを持つ OpLev がある. この場合, 光線行列を用いてビーム変位 x_2 を求める.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r_{\text{lens}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2 \sin \alpha)x_L \\ 2\theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

ここで, r_{lens} は反射面とレンズの距離である. これより

$$x_2 = (2 \sin \alpha) \left(1 - \frac{d}{f}\right) x_L + 2 \left[\left(1 - \frac{d}{f}\right) r_1 + d \right] \theta. \quad (\text{B.4})$$

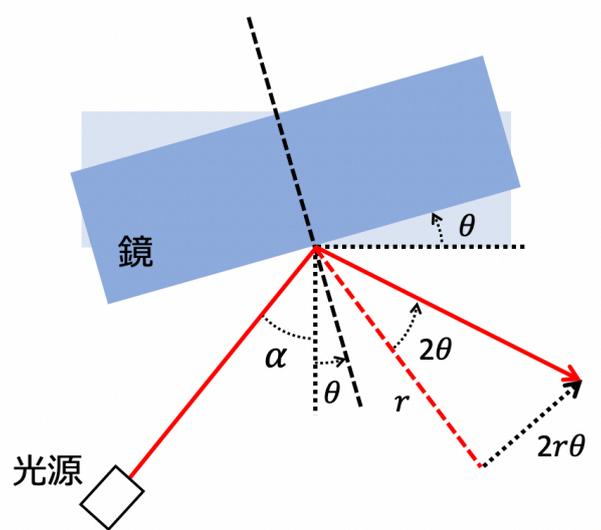


図 B.1 鏡の回転に対する OpLev 光のずれ. 鏡の回転によって OpLev のビームがずれる. 赤い点線が元の光軸を表しており, 実線は鏡が回転した時の光軸を示す.

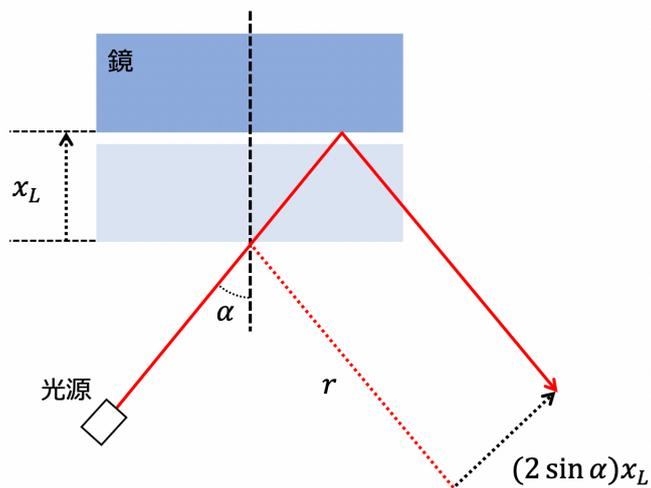


図 B.2 鏡の L 方向のずれに対する OpLev 光のずれ. 赤い点線が元の光軸を表しており, 実線は鏡が L 方向に移動した時の光軸を示す.

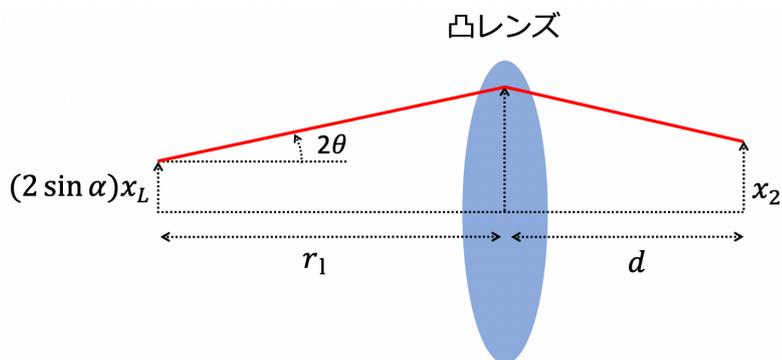


図 B.3 レンズの後ろにあるビーム位置を感知する第 2 のビーム変位センサ

また、センサの位置を

$$d = \frac{r_1 f}{r_1 - f}, \quad (\text{B.5})$$

と設定することによって式 (B.4) の右辺第 2 項、つまり角度のカップリングを 0 にすることができる。これにより、第 2 のビーム変位センサは L 方向 (length sensing) のセンサとなる。

式 (B.5) が成り立つ場合、length sensing センサで読み取れるビーム変位は

$$x_2 = \left(\frac{-2f \sin \alpha}{r_1 - f} \right) x_L, \quad (\text{B.6})$$

となる。ここで、式 (B.2) を式 (B.6) に代入すると、

$$\begin{pmatrix} x_L \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin \alpha & 2r \\ \frac{-2f \sin \alpha}{r_1 - f} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

のようにセンシング行列が得られるので、これを用いてセンサの対角化が行われる。

B.2 KAGRA の低温懸架系における OpLeV

KAGRA では tilt sensing OpLeV (B.1 に最も単純なものと記したもの) と length sensing OpLeV (B.1 に第 2 のビーム変位センサとして記したもの) の 2 種類が用いられている。これらは共に水平方向、垂直方向のビームスポットの変位を見ることができるので、それを $(x_{\text{tilt}}, y_{\text{tilt}})$, $(x_{\text{len}}, y_{\text{len}})$ と書く。

また、KAGRA では反射光を検知する光検出器として QPD (Quadrant PhotoDiode) を用いている。ここで、QPD とは 4 つに分割された PD であり、それぞれの領域に入射した光の強度を測定している。KAGRA では各領域のカウント数と全体のカウント数から QPD 上の距離を算出している (図 B.4)。この QPD はビームに対して垂直に設置されているので、QPD で検出したビームスポット位置の変位は一般的にはグローバルな水平、垂直方向に対して平行ではない。



count 数の和

$$S = \text{SEG1} + \text{SEG2} + \text{SEG3} + \text{SEG4}$$

例) P方向の変位

count 数の変化の割合 :

$$(\text{SEG3} + \text{SEG4} - \text{SEG1} - \text{SEG2}) / S$$

→ 線形応答範囲で分割割合をQPD上の距離に変換

図 B.4 QPD の図. 各領域のカウント数から QPD 上の距離を算出している。

ここで、特に関心があるのは鏡の変位のうち、L 方向 : x_L , P 方向 : θ_P , Y 方向 : θ_Y であるから $\mathbf{x} = (x_{\text{tilt}}, y_{\text{tilt}}, x_{\text{lim}}, y_{\text{lim}})^T$ を鏡の動き $(x_L, \theta_P, \theta_Y)^T$ に対応させる行列を求めればよい。

OpLeV の腕を任意のベクトル $\mathbf{r} = r_x \hat{x} + r_y \hat{y} + r_z \hat{z}$ で表す。なお、 \hat{x} は鏡の T 方向、 \hat{y} は鏡の V 方向、 \hat{z} は鏡の L 方向である。また、簡単のため B.2 節ではビームのミスセンタリングはないものとする (図 B.5, B.6 中の $\delta_x, \delta_y = 0$)。

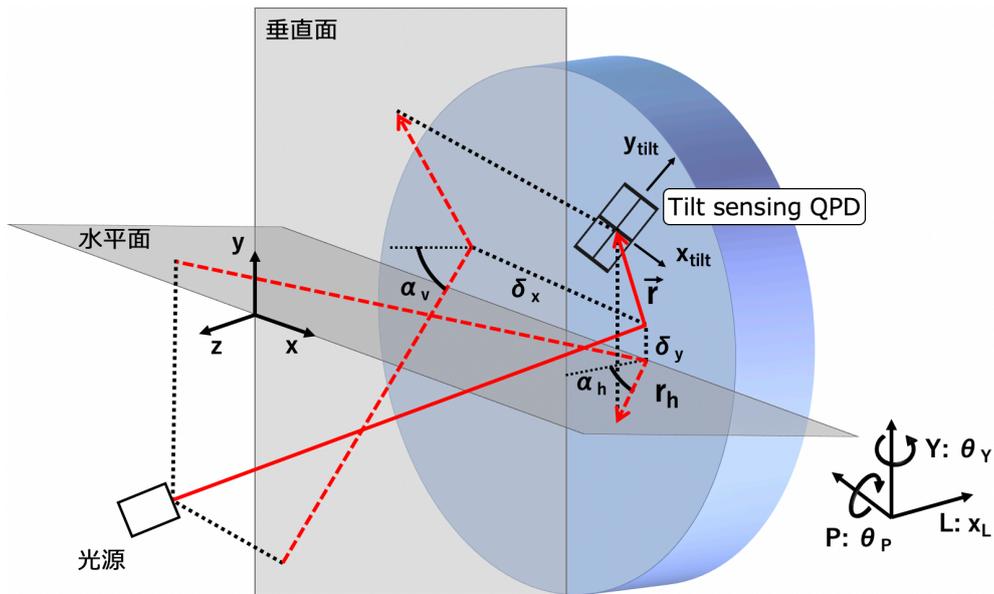


図 B.5 KAGRA における tilt sensing OpLeV のセットアップ. 実線はビームを, 点線はその水平面・垂直面への投影である.

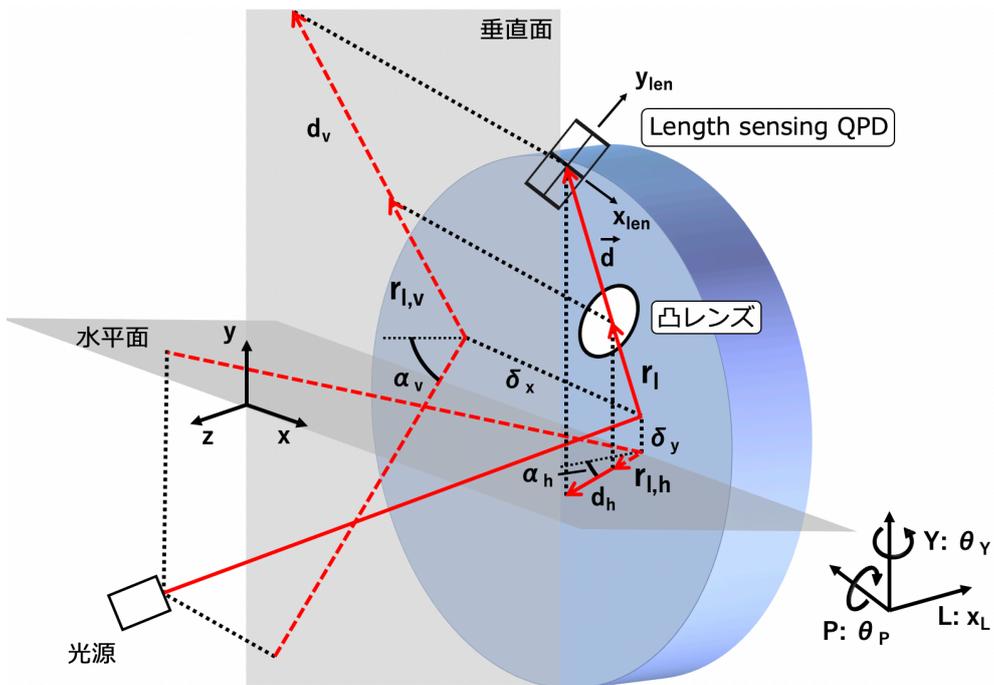


図 B.6 KAGRA における length sensing OpLeV のセットアップ. 実線はビームを, 点線はその水平面・垂直面への投影である. tilt sensing OpLeV の場合と比べ, レンズが追加されている.

tilt sensing OpLeV のセットアップは図 B.5 に示す通りである. ビームを水平面と垂直面に投影すると, ビームの入射角は水平面では α_h , 垂直面では α_v となる. これより P 角を増幅するのは, レバーアームの垂直面への投影長さ r_v となる. 同様に, Y 角を増幅するのは, レバーアームの水平面上への投影の長さ r_h となる. したがって θ_Y と θ_P の回転により, レバーアーム先端のビームスポットは水平面上で $(2r_h)\theta_Y$, 垂直面上で $(2r_v)\theta_P$ だけ移動することになる. 一方, L 方向のシフト x_L により, ビームスポットは水平面と垂直面でそれぞれ $(2\sin\alpha_h)x_L$ と $(2\sin\alpha_v)x_L$ だけ移動することになる. これより鏡上のビームスポットが

ら $|\mathbf{r}|$ 離れた位置にある tilt sensing OpLev の QPD によって測定されたビームスポットの変位は、回転と縦方向のシフトによるものを単純に重ね合わせたもので書ける。

$$x_{\text{tilt}} = (2r_h)\theta_Y + (2 \sin \alpha_h)x_L, \quad (\text{B.8})$$

$$y_{\text{tilt}} = (2r_v)\theta_P + (2 \sin \alpha_v)x_L. \quad (\text{B.9})$$

一方, length sensing OpLev のセットアップは図 B.6 に示す通りである (ビームは図 B.5 と同じ)。ここで, 鏡から焦点距離 f の凸レンズまでの方向を \mathbf{r}_1 と書く。水平面へのレバーアームの射影を $r_{1,h}$ とすると, length sensing OpLev の QPD 上におけるビームスポット変位は光線行列を用いて

$$x_{\text{len}} = (2 \sin \alpha_h) \left(1 - \frac{d_h}{f_h}\right) x_L + 2 \left[\left(1 - \frac{d_h}{f_h}\right) r_{1,h} + d_h \right] \theta_Y, \quad (\text{B.10})$$

と書ける。ここで d_h はレンズと length sensing OpLev の QPD との水平面上の距離, f_h は水平面上での焦点距離である。また,

$$r_{1,h} = |\mathbf{r}_1| \cos \theta_h, \quad (\text{B.11})$$

となるように水平面とビームの角度 θ_h を導入する。さらに, レンズと length sensing OpLev の QPD との水平面上の距離や焦点距離についても同様に

$$d_h = |\mathbf{r}_1| \cos \theta_h, \quad (\text{B.12})$$

$$f_h = f \cos \theta_h, \quad (\text{B.13})$$

と書ける。ここで式 (B.11), (B.12), (B.13) を式 (B.10) へ代入すると

$$x_{\text{len}} = (2 \sin \alpha_h) \left(1 - \frac{d}{f}\right) x_L + 2 \cos \theta_h \left[\left(1 - \frac{d}{f}\right) r_1 + d \right] \theta_Y, \quad (\text{B.14})$$

となるので length sensing OpLev の QPD は

$$d = \frac{r_1 f}{r_1 - f}, \quad (\text{B.15})$$

に置けば良いと分かる (これは式 (B.5) と同じである。)。一方, 式 (B.10) において水平面に射影した量を垂直面の場合に置き換えると, length sensing OpLev の QPD 上におけるビームスポットの垂直方向の変位は

$$y_{\text{len}} = (2 \sin \alpha_v) \left(1 - \frac{d_v}{f_v}\right) x_L + 2 \left[\left(1 - \frac{d_v}{f_v}\right) r_{1,v} + d_v \right] \theta_P, \quad (\text{B.16})$$

となる。

ここで正しく設置された OpLev に対し, センシング行列を $\mathbf{C}_{\text{align}}$ として式 (B.8), (B.9), (B.10), (B.16) をまとめると

$$\begin{pmatrix} x_L \\ \theta_P \\ \theta_Y \end{pmatrix} = \mathbf{C}_{\text{align}} \begin{pmatrix} x_{\text{tilt}} \\ y_{\text{tilt}} \\ x_{\text{len}} \\ y_{\text{len}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

ここで

$$\mathbf{C}_{\text{align}} = \begin{pmatrix} 2 \sin \alpha_h & 0 & 2r_h & 0 \\ 2 \sin \alpha_v & 2r_v & 0 & 0 \\ 2 \sin \alpha_h \left(1 - \frac{d_h}{f_h}\right) & 0 & 2 \left[\left(1 - \frac{d_h}{f_h}\right) r_{1,h} + d_h \right] & 0 \\ 2 \sin \alpha_v \left(1 - \frac{d_v}{f_v}\right) & 2 \left[\left(1 - \frac{d_v}{f_v}\right) r_{1,v} + d_v \right] & 0 & 0 \end{pmatrix}^+. \quad (\text{B.18})$$

なお, $[\cdot]^+$ は $[\cdot]$ の擬似逆行列であり, $[\cdot]^+ [\cdot] = \mathbf{I}$ である.

入射面が水平 (HOR) 面または垂直 (VER) 面に沿っていると仮定すると, 式 (B.17) は以下のように簡略化できる.

HOR OpLev の場合

$\alpha_v = 0$ であり, length sensing QPD の垂直方向の読み値 y_{len} は理想的には 0 となる. そこで, センシング行列がフルランクになるように, y_{len} を省略できる. したがって, HOR OpLev センシング行列は

$$\begin{pmatrix} x_L \\ \theta_P \\ \theta_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin \alpha_h & 0 & 2r_h \\ 0 & 2r_v & 0 \\ -\frac{2f \sin \alpha_h}{r_1 - f} & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{\text{tilt}} \\ y_{\text{tilt}} \\ x_{\text{len}} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.19})$$

となる. ここで, length sensing QPD の位置は凸レンズから $d = d_h = \frac{r_1 f}{r_1 - f}$ 離れた位置にあると仮定した. なお, HOR OpLev ではビームは水平面上にあるのでレバーアームは $r_h = r$ であり, 垂直面への射影は $r_v = r \cos \alpha_h$ である. さらに鏡からレンズまでの水平方向のアームの変位は $r_{1,h} = r_1$ となる.

VER OpLev の場合

$\alpha_h = 0$ であり, length sensing QPD の垂直方向の読み値 x_{len} は理想的には 0 となるので, HOR OpLev の場合と同じようにセンシング行列がフルランクとなるよう x_{len} を省略すると

$$\begin{pmatrix} x_L \\ \theta_P \\ \theta_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2r_h \\ 2 \sin \alpha_v & 2r_v & 0 \\ -\frac{2f \sin \alpha_v}{r_1 - f} & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{\text{tilt}} \\ y_{\text{tilt}} \\ y_{\text{len}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

ここで, 先ほどと同様に $d = d_v = \frac{r_1 f}{r_1 - f}$ であり, $r_v = r$, $r_h = r \cos \alpha_v$, $r_{1,v} = r_1$ である.

補遺 C

反射型フォトセンサ

C.1 反射型フォトセンサの理論式

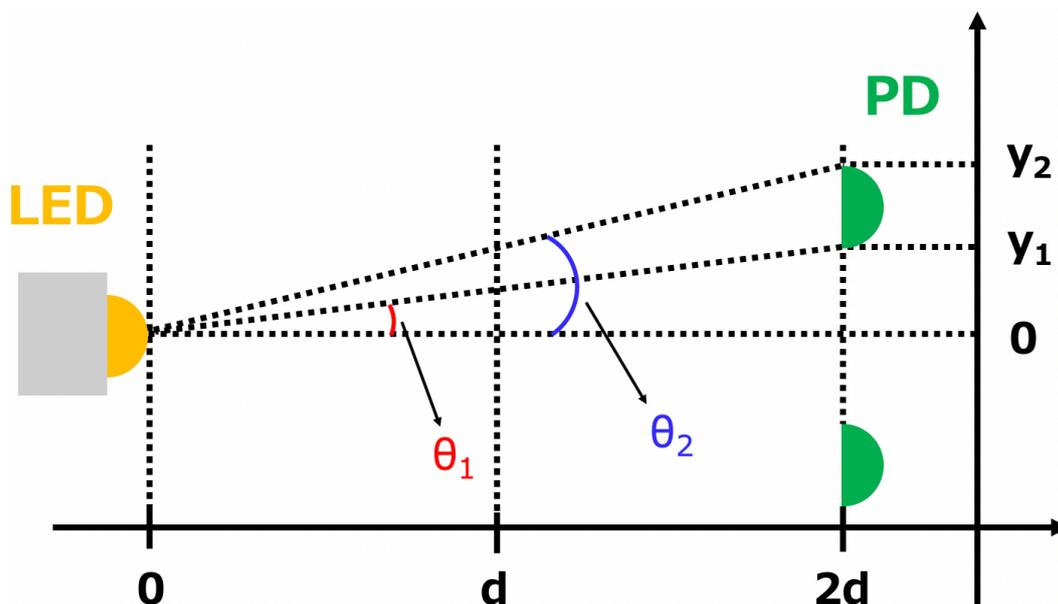


図 C.1 反射型フォトセンサの 2 次元モデル

4.2.2.2 節で記した通り, KAGRA ではダンピング制御に用いるセンサとして, 反射型フォトセンサを用いている. ここでは反射型フォトセンサの応答について, 図 C.1 に示したような 2 次元応答モデルを考え, その理論式を示す.

反射型フォトセンサの動作原理は図 4.13 に示す通り, LED から出た光が距離 d だけ離れたターゲット (懸架装置の各ステージ) で反射して LED と同じ位置にある PD に帰ってくる光量の変化を読み取るというものである. よって LED から出た後 PD に入るまでに光は水平距離 (図 C.1 の横軸方向) で $2d$ 進むことになる. そこで, ここでは LED から出た光がターゲットで n 回反射して, $2d$ の距離だけ離れた PD に入るという状況を考える.

さらに PD の各端の位置を図 C.1 のようにそれぞれ y_1, y_2 とし、そこに向かう角度を θ_1, θ_2 とすると

$$y_1 = 2nd \times \tan \theta_1, \quad (\text{C.1})$$

$$y_2 = 2nd \times \tan \theta_2. \quad (\text{C.2})$$

ここで、LED の光は直進性が強く、配光角（明るく照らすことのできる角度）が限られているため、そのビームプロファイルは角度に依存すると考え、 $I(\theta)$ と書く。このとき、PD が対称に 2 つ取り付けられていることに注意すると、反射型フォトセンサの出力応答は

$$O(d) = 2 \sum_n r^n \int_{\theta_1}^{\theta_2} I(\theta) d\theta. \quad (\text{C.3})$$

ただし、 r は光の反射率を表す。この式と式 (C.1), (C.2) を合わせて反射型フォトセンサの出力を求めることができる。

さて、光がガウシアンビームだとすると

$$I(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (\text{C.4})$$

と書ける。また、KAGRA で用いられている反射型フォトセンサは $y_1 = 8 \text{ mm}$, $y_2 = 10 \text{ mm}$ である [50]。この値を用いてその応答をプロットすると、図 C.2 のようになる。

図を見ると、距離が離れるにしたがって低次の反射光が PD に入るようになるとセンサの応答は大きくなっていく。これは低次の反射光は高次のものに比べて光量が多いためである。その後、1 次の反射光の広がり方が PD をカバーするようになると、距離の増加に伴って光量が減少し、出力は小さくなっていく。なお、赤線がガウシアンビーム、青線が等方的に広がるビームの場合である。ガウシアンビームの場合、ビーム幅が広く、ピーク以降も強い光の高次反射光（ビーム中心）が PD に入る。よって、等方的な場合に比べ、ピーク付近の応答が緩やかであり、線形範囲が広がっている。また、これより低温懸架装置で用いられる反射型フォトセンサでは、およそ 10 mm ~ 35 mm の距離測定で使うことができる。

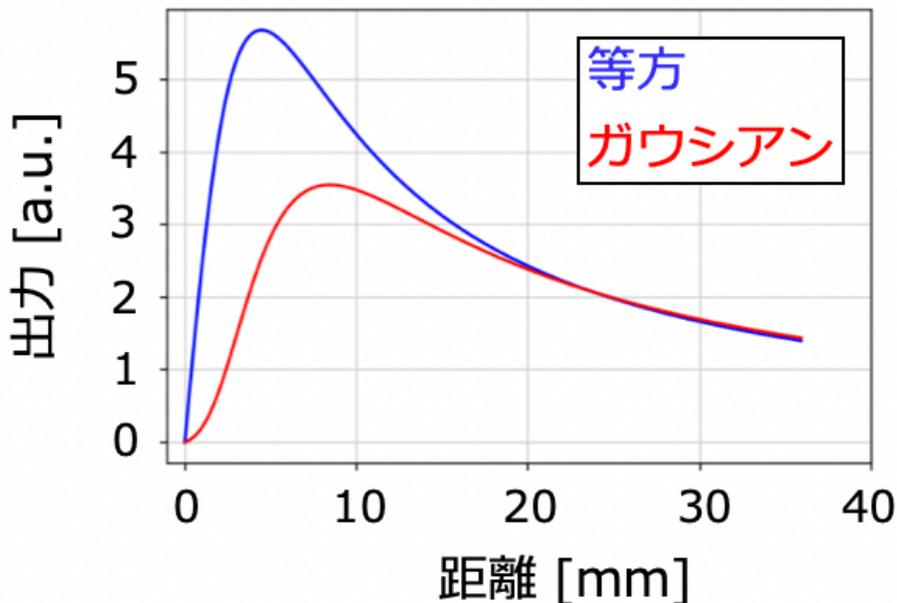


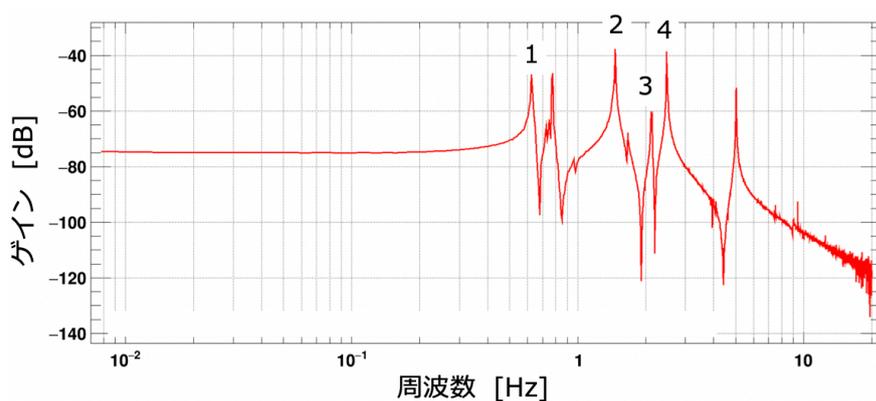
図 C.2 反射型フォトセンサの応答。低次の反射光が PD に入るようになるとセンサの応答は大きくなり、その後は距離の増加に伴って光量が減少するので出力は小さくなっていく。また、ガウシアンビームはビーム幅が広く、等方的なビームに比べて線形範囲が広い。

補遺 D

伝達関数一覧

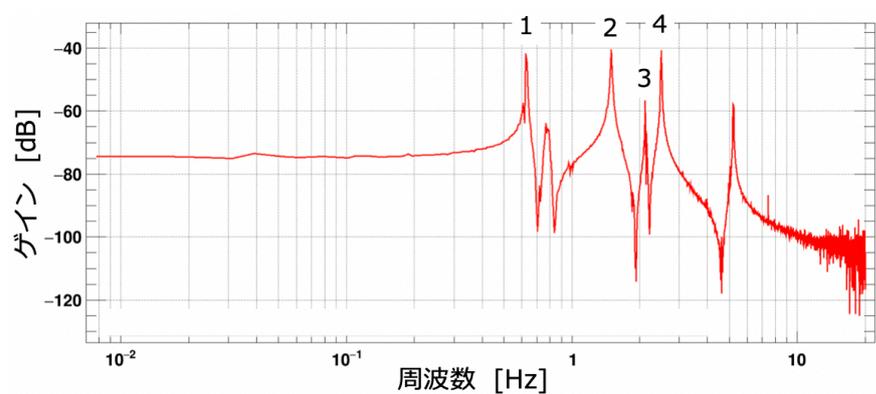
ここでは 6.3.1 で記した, 共振ピークの同定の際に測定した伝達関数 (各方向の励起信号から MN の動きまでの伝達関数) を示す.

ETMX MN L



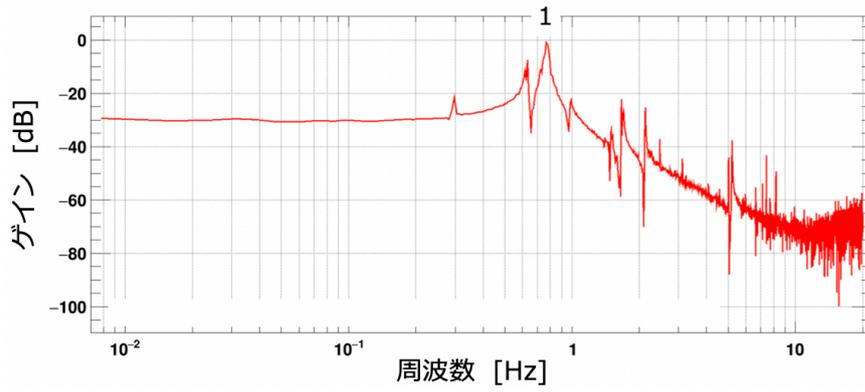
Mode	
1:	0.63 Hz
2:	1.46 Hz
3:	2.12 Hz
4:	2.47 Hz

ETMX MN T



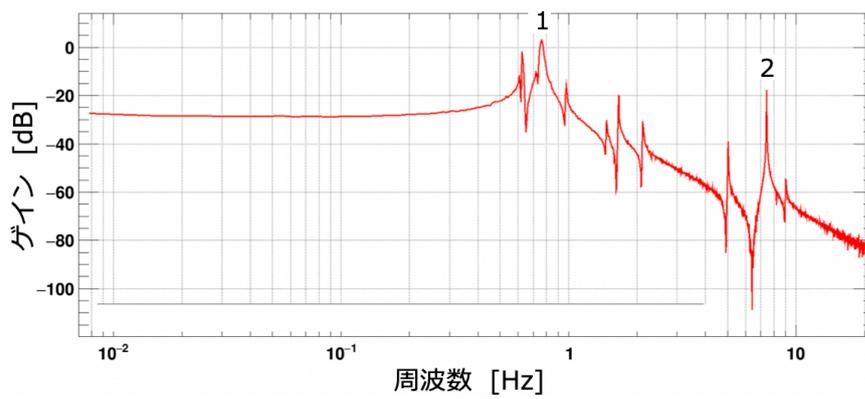
Mode	
1:	0.63 Hz
2:	1.49 Hz
3:	2.12 Hz
4:	2.49 Hz

ETMX MN R



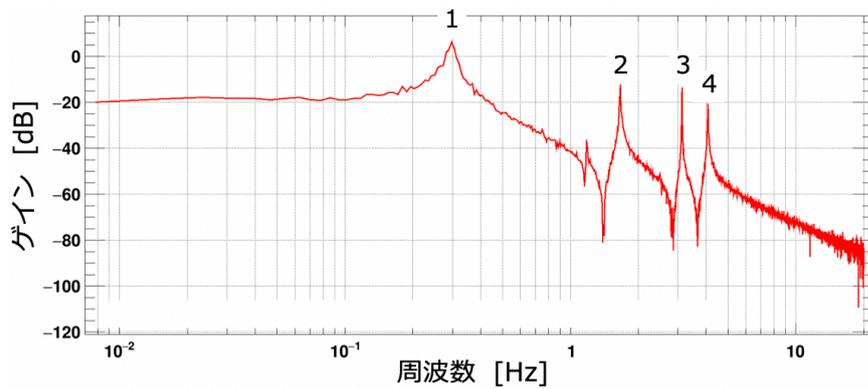
Mode
1: 0.77 Hz

ETMX MN P



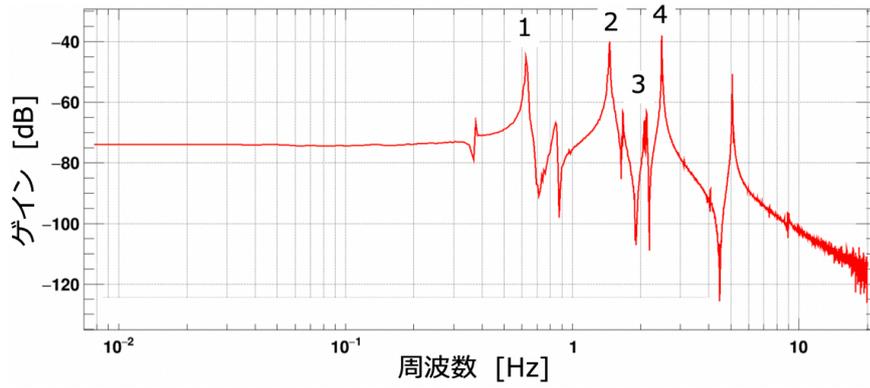
Mode
1: 0.76 Hz
2: 7.42 Hz

ETMX MN Y



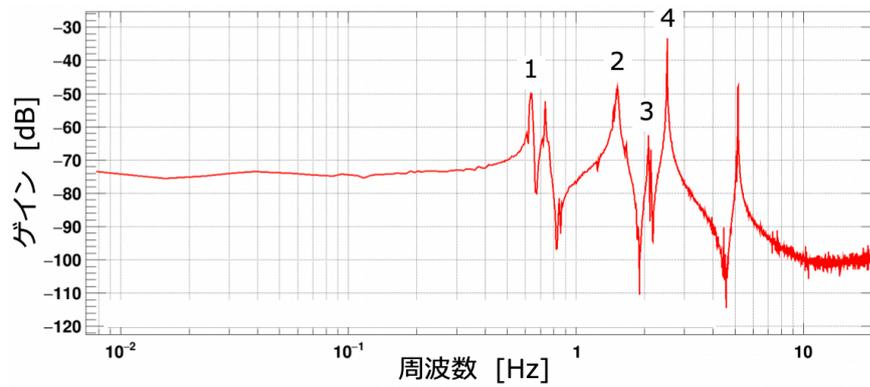
Mode
1: 0.30 Hz
2: 1.66 Hz
3: 3.13 Hz
4: 4.08 Hz

ETMY MN L



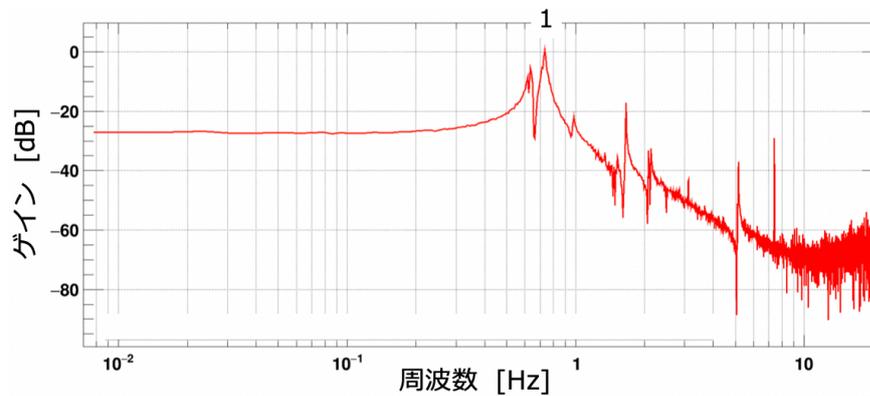
- Mode
- 1: 0.63 Hz
 - 2: 1.46 Hz
 - 3: 2.13 Hz
 - 4: 2.48 Hz

ETMY MN T



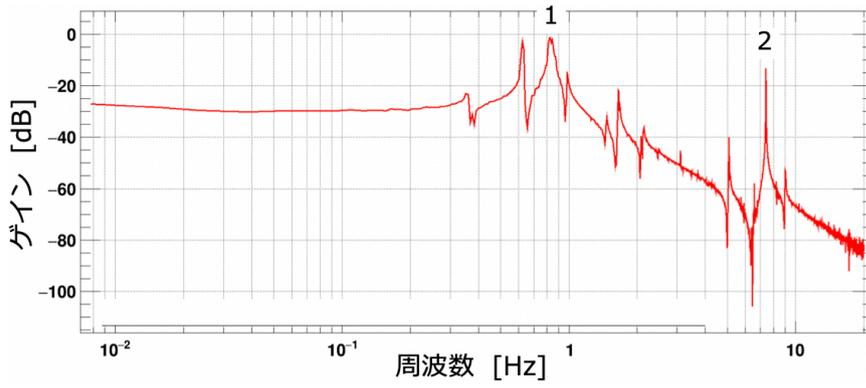
- Mode
- 1: 0.63 Hz
 - 2: 1.52 Hz
 - 3: 2.09 Hz
 - 4: 2.52 Hz

ETMY MN R



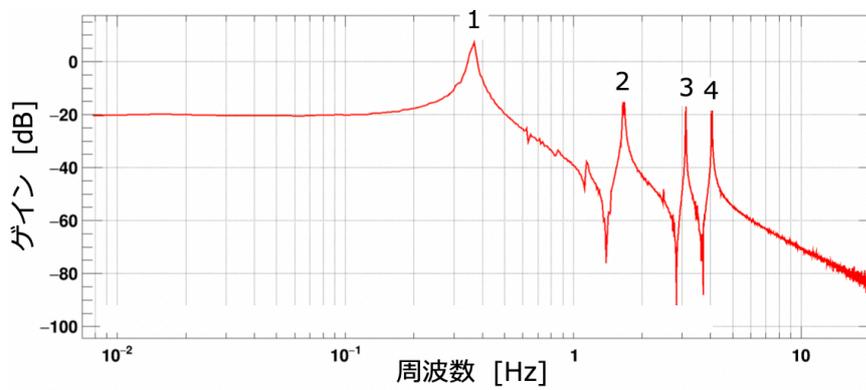
- Mode
- 1: 0.73 Hz

ETMY MN P



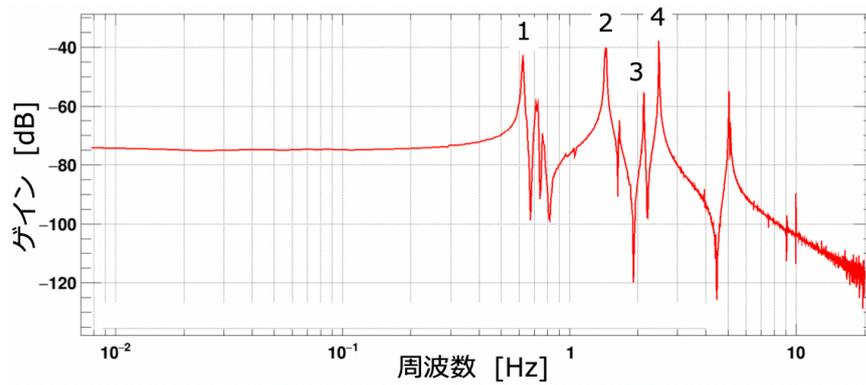
Mode
1: 0.82 Hz
2: 7.40 Hz

ETMY MN Y



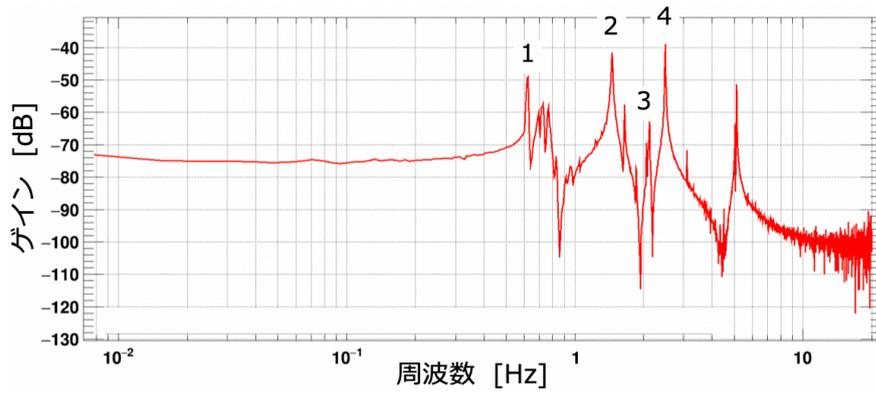
Mode
1: 0.37 Hz
2: 1.65 Hz
3: 3.11 Hz
4: 4.05 Hz

ITMX MN L



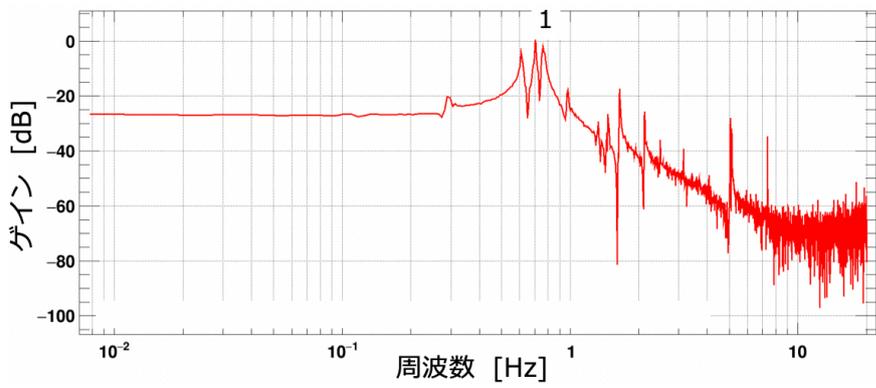
Mode
1: 0.63 Hz
2: 1.45 Hz
3: 2.13 Hz
4: 2.48 Hz

ITMX MN T



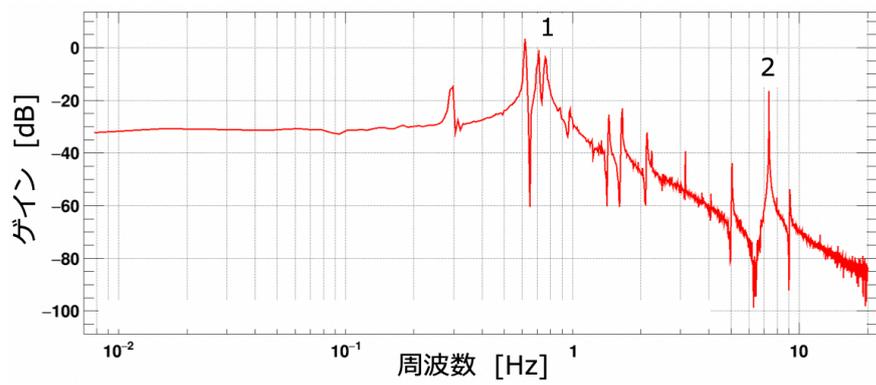
- Mode
- 1: 0.63 Hz
 - 2: 1.45 Hz
 - 3: 2.13 Hz
 - 4: 2.49 Hz

ITMX MN R



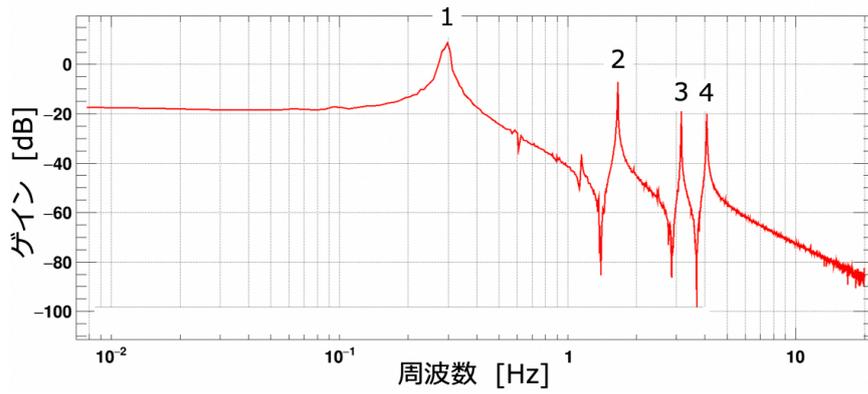
- Mode
- 1: 0.76 Hz

ITMX MN P



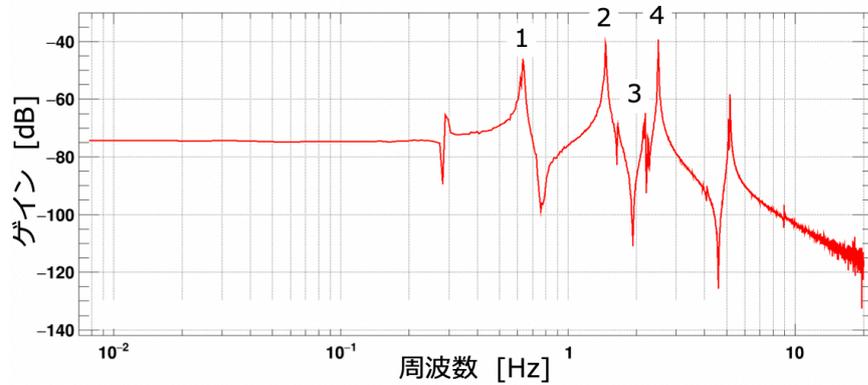
- Mode
- 1: 0.76 Hz
 - 2: 7.35 Hz

ITMX MN Y



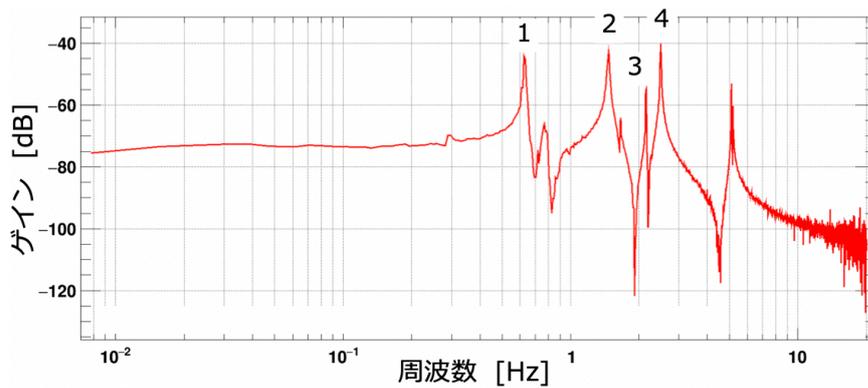
- Mode
- 1: 0.30 Hz
 - 2: 1.66 Hz
 - 3: 3.15 Hz
 - 4: 4.07 Hz

ITMY MN L



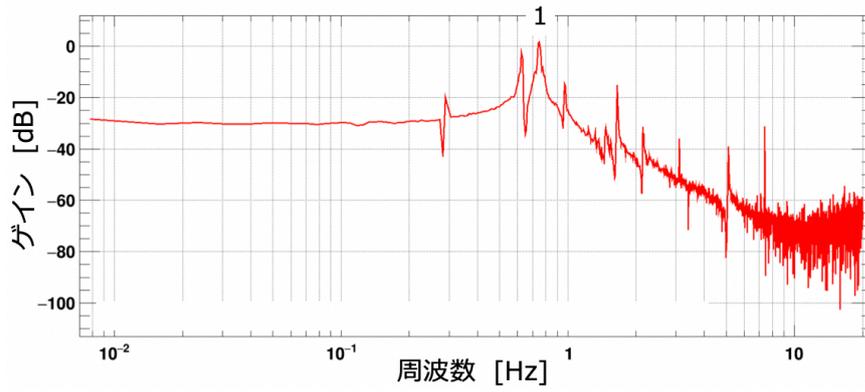
- Mode
- 1: 0.63 Hz
 - 2: 1.46 Hz
 - 3: 2.19 Hz
 - 4: 2.50 Hz

ITMY MN T



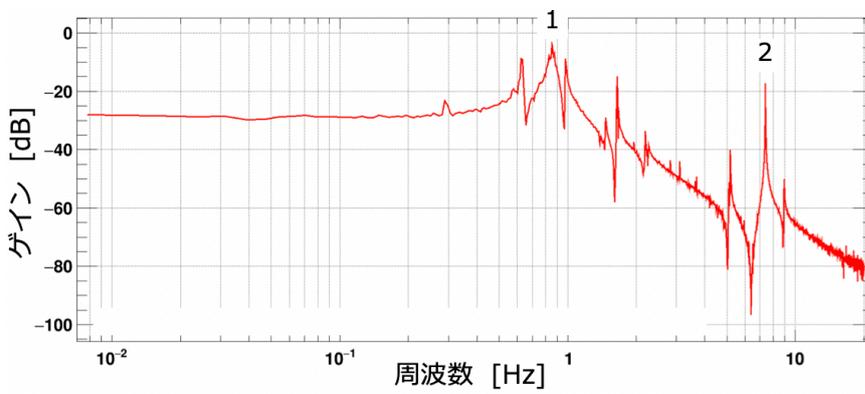
- Mode
- 1: 0.63 Hz
 - 2: 1.47 Hz
 - 3: 2.16 Hz
 - 4: 2.50 Hz

ITMY MN R



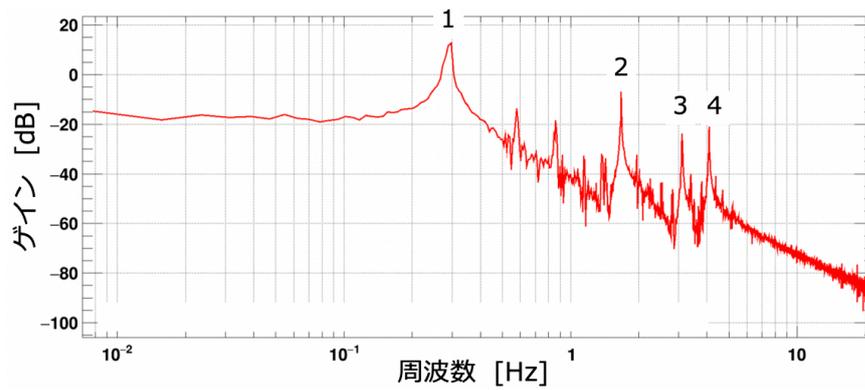
Mode
1: 0.75 Hz

ITMY MN P



Mode
1: 0.85 Hz
2: 7.39 Hz

ITMY MN Y



Mode
1: 0.30 Hz
2: 1.67 Hz
3: 3.09 Hz
4: 4.09 Hz

参考文献

第 1 章 序論

- [1] A. Einstein, “Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation”, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1:688-696, (1916).
- [2] A. Einstein, “ber Gravitationswellen. Sitzungsber”, *Sitzungsberichte der Königlich Preuischen Akademie der Wissenschaften*, 1:154-167, (1918).
- [3] R. A. Hulse and J. H. Taylor, “Discovery of a pulsar in a binary system”, *The Astrophysical Journal*, 195:L51-L53, (1975).
- [4] J. H. Taylor and J. M. Weisberg, “A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16”, *The Astrophysical Journal*, 253:908-920, (1982).
- [5] J. Aasi *et al.*, “Advanced LIGO”, *Classical and Quantum Gravity*, 32, 074001, (2015).
- [6] B. P. Abbott *et al.*, “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”, *Physical Review Letters*, 116(6), 061102, (2016).
- [7] N. Yunes and X. Siemens, “Gravitational-wave tests of general relativity with ground-based detectors and pulsar-timing arrays”, *Living Reviews in Relativity*, 16, (2013).
- [8] B. P. Abbott *et al.*, “Tests of General Relativity with GW150914”, *Physical Review Letters*, 116(22), 221101, (2016).
- [9] F. Acernese *et al.*, “Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector”, *Classical and Quantum Gravity*, 32(2), 024001, (2015).
- [10] B. P. Abbott *et al.*, “GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence”, *Physical Review Letters*, 119 141101, (2017).
- [11] B. P. Abbott *et al.*, “GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral”, *Physical Review Letters*, 119, 161101, (2017).
- [12] E. Troja *et al.*, “The X-ray counterpart to the gravitational-wave event GW170817”, *Nature*, 551:71-74, (2017).
- [13] B. P. Abbott *et al.*, “Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger”, *Astrophys. J.* 848, L12, (2017).
- [14] Y. Aso *et al.*, “Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector”, *Physical Review D*, 88, 043007, (2013).

- [15] H. Lück *et al.*, “The upgrade of GEO 600”, Journal of Physics: Conference Series 228, (2010).
- [16] T. Sekiguchi, “Seismic Spectrum in Kamioka Mine”,
https://gwdoc.icrr.u-tokyo.ac.jp/DocDB/0029/T1402971/001/141106_seismic_noise.pdf, (2014).
- [17] 山元一広, 「干渉計型重力波検出器における低温鏡の先進性」, 低温工学, 46(426-433), (2011).
- [18] M. Maggiore *et al.*, “Science Case for the Einstein Telescope”, JCAP03, 053, (2020).
- [19] T. Ushiba *et al.*, “Cryogenic suspension design for a kilometer-scale gravitational-wave detector”, Classical and Quantum Gravity, 38, 085013, (2021).
- [20] KAGRA Collaboration, “Performance of the KAGRA detector during the first joint observation with GEO 600 (O3GK)”, Progress of Theoretical and Experimental Physics, ptac093, (2022).
- [21] B. P. Abbott *et al.*, “GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence”, Physical Review Letters, 116, 241103, (2016).

第 2 章 重力波望遠鏡とレーザー干渉計型重力波検出器

- [22] M. Maggiore, “Gravitational Waves. Vol.1, Theory and Experiments”, Oxford Univ. Press, (2008).
- [23] J. Aasi *et al.*, “Gravitational Waves From Known Pulsars: Results From the Initial Detector Era”, The Astrophysical Journal, 785(2), 119, (2014).
- [24] C. D. Ott, “The gravitational-wave signature of core-collapse supernovae”, Classical and Quantum Gravity, 26(6), 063001, (2009).
- [25] B. D. Metzger and E. Berger, “What is the most promising electromagnetic counterpart of a neutron star binary merger?”, APJ 746, (2012).
- [26] B. P. Abbott *et al.*, “Tests of General Relativity with GW170817”, Physical Review Letters, 123, 011102, (2019).
- [27] M. Ando, Ph.D. Thesis, “Power recycling for an interferometric gravitational wave detector”, The University of Tokyo, (1998).
- [28] J. Mizuno *et al.*, “Resonant sideband extraction: a new configuration for interferometric gravitational wave detectors”, Physics Letters A, 175(5):273-276, (1993).
- [29] V. B. Braginsky, F. Y. Khalili, “Quantum Measurement”, Cambridge, (1995).
- [30] Levin, Y., “Internal thermal noise in the LIGO test masses: A direct approach”, Physical Review D, 57, 659, (1998).
- [31] H. B. Callen and T. A. Welton, “Irreversibility and generalized noise”, Physical Review, 83(1):34-40, (1951).
- [32] Braginsky, V.B. *et al.*, “Thermodynamical fluctuations and photo-thermal shot noise in gravitational wave antennae”, Physical Review A, Vol.264 (1999).
- [33] K. Somiya, “Detector configuration of KAGRA-the Japanese cryogenic gravitational-wave detector”, Classical and Quantum Gravity, 29(12), 124007, (2012).

- [34] J. Peterson, “Observations and modeling of seismic background noise”, U.S. Geological Survey Open-File Report, 93-322, (1993).
- [35] LCGT Collaboration, “LCGT report 3rd edition”,
<https://gwdoc.icrr.u-tokyo.ac.jp/DocDB/0000/T0400030/004/LCGTdesign091125.pdf>, (2009)
- [36] R. Essick *et al.*, “Frequency-dependent responses in third generation gravitational-wave detectors”, *Physical Review*, 96, 084004 (2017).
- [37] M. Punturo *et al.*, “The Einstein Telescope: a third-generation gravitational wave observatory”, *Classical and Quantum Gravity*, 27, 194002, (2010).

第3章 懸架系による防振

- [38] T. Sekiguchi, Ph.D. Thesis, “A Study of Low Frequency Vibration Isolation System for Large Scale Gravitational Wave Detectors”, The University of Tokyo, (2015).
- [39] E. Morrison *et al.*, “Automatic alignment of optical interferometers”, *Applied Optics*, 33, 5041-5049, (1994).

第4章 KAGRA Type-A Suspension

- [40] H. Tariq *et al.*, “The linear variable differential transformer (LVDT) position sensor for gravitational wave interferometer low-frequency controls”, *Nuclear Instruments Methods A*, 489, 570-576, (2002).
- [41] L. Trozzo, “Commissioning of The typeA suspension control: tower part”,
<https://gwdoc.icrr.u-tokyo.ac.jp/cgi-bin/private/DocDB/ShowDocument?docid=10097>, (2019)
- [42] F. Acernese *et al.*, “Low Frequency - High Sensitivity Horizontal Inertial Sensor based on Folded Pendulum”, *Journal of Physics Conference Series*, 363 012001, (2012).
- [43] A. Bertolini *et al.*, “Monolithic Folded Pendulum Accelerometers for Seismic Monitoring and Active Isolation Systems”, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 44:273-276, (2006).
- [44] C. Wang *et al.*, “Constant force actuator for gravitational wave detector’s seismic attenuation systems (SAS)”, *Nuclear Instruments Methods A*, 489 (1-3), 563-569, (2002).
- [45] 西本巧, 修士論文, 「重力波望遠鏡 KAGRA における極低温鏡懸架システム」, 東京大学, (2020).
- [46] K. Haughian *et al.*, “Mechanical loss of a hydroxide catalysis bond between sapphire substrates and its effect on the sensitivity of future gravitational wave detectors”, *Physical Review D*, 94, 082003, (2012).
- [47] 宮本昂拓, 修士論文, 「重力波検出器 KAGRA の低温懸架系の開発」, 東京大学, (2016).
- [48] ソーラボジャパン株式会社, “LED1200E SpecSheet”, <https://www.thorlabs.co.jp/drawings/c857b55f5a1b917-22B85151-F8AE-6677-96DECEE9A6BE5497/LED1200E-SpecSheet.pdf>.
- [49] ソーラボジャパン株式会社, “FGA21 SpecSheet”, <https://www.thorlabs.co.jp/drawings/c857b55f5a1b917-22B85151-F8AE-6677-96DECEE9A6BE5497/FGA21-SpecSheet.pdf>.

- [50] 福永真士, 修士論文, 「低温光センサーの開発と KAGRA 低温懸架装置のダンピング制御への応用に関する研究」, 東京大学, (2019).
- [51] Y. Michimura *et al.*, “Mirror actuation design for the interferometer control of the KAGRA gravitational wave telescope”, *Classical and Quantum Gravity*, 34, 225001, (2017).
- [52] T. Tomaru *et al.*, “Vibration analysis of cryocoolers”, *Cryogenics*, 44:309-317, (2004)
- [53] 山田智宏, 修士論文, 「大型低温重力波望遠鏡 KAGRA における極低温鏡懸架システムとその伝導冷却に関する研究」, 東京大学, (2018).

第 5 章 低温懸架装置の特性評価

- [54] K. Okutomi *et al.*, “Eigenmode list of the Type-A suspension”,
<https://gwdoc.icrr.u-tokyo.ac.jp/cgi-bin/private/DocDB/ShowDocument?docid=7866>, (2018)

第 7 章 制御雑音の低減

- [55] K. Okutomi, Ph.D. Thesis, “Development of 13.5-meter-tall Vibration Isolation System for the Main Mirrors in KAGRA”, The Graduate University for Advanced Studies, (2019)

補遺 A 反バネ効果による低周波共振

- [56] A. Takamori, Ph.D. Thesis, “Low frequency seismic isolation for gravitational wave detectors”, The University of Tokyo, (2002).
- [57] A. Stochino *et al.*, “Improvement of the seismic noise attenuation performance of the Monolithic Geometric Anti-Spring filters for gravitational wave interferometric detectors”, *Nuclear Instruments Methods A*, 580 (3), 1559-1564, (2007).

謝辞

修士課程での研究活動および本論文の執筆にあたり、多くの方々にご支援いただきました。ご協力いただいた全ての皆様に深く感謝申し上げます。

指導教官である三代木伸二教授には修士課程中のあらゆる面でお世話になりました。研究や発表、論文の執筆などの進捗を気にかけてくださったほか、助言も数多くいただきました。そればかりでなく、旅費や送迎をはじめ、神岡で研究活動に取り組めるよう様々な手配をしていただきました。何の気兼ねもなく神岡で研究ができたことに感謝しています。氏の学生であることを誇りに思い、それに恥じない研究生を送りたいと思います。

宇宙線研究所の牛場崇文助教には2年間を通じて大変お世話になりました。進学前であったにも関わらず、KAGRAにおける低温技術の説明をしていただき、さらに興味が深まったのを覚えています。また、神岡では坑内作業の際にご一緒させていただき、懸架装置の仕組みやソフトウェアの使い方などを1から丁寧に教えていただきました。さらに学会発表や本論文についても丁寧にみていただき、その度に的確なコメントを数多くいただきました。本論文をまとめることができたのは氏のおかげです。

宇宙線研究所の内山隆准教授は何度も富山駅から神岡まで送迎していただいたほか、体調や研究の進捗など、いつも気にかけていただきました。また、毎週金曜日には研究室ミーティング及びセミナーを執り行っていただいたことに加え、学会などの発表練習にも付き合ってください、その度に的確かつ鋭い質問をしていただきました。

国立天文台の都丸隆行教授にはあらゆる面で大変お世話になりました。坑内作業でご一緒させていただく際は、その手際の良さや実験の深い知識から多くを学びました。また、低温技術について雑談したり相談させていただく際は、魅力的なアイデアが次々と出てきて驚かされただけでなく、研究を行う上での物事の見方を数多く示していただき非常に参考になりました。ご自身の研究室の学生ではないにも関わらず、KEKの見学やTAに至るまで、あらゆる場面で気にかけていただき、大変感謝しております。

富山大学の山元一広准教授からは主にCRYグループのミーティングにおいて、研究に対する助言やコメントを数多くいただきました。さらに、学会発表やポスター発表の資料および本論文に対しても的確なご指摘やアドバイスをくださいました。また、重力波実験の分野で低温に関する研究をするにあたり、氏の修士論文は大変参考になりました。

宇宙線研究所の大橋正健教授は神岡で研究する際に不自由がないよう、いつも気にかけてくださいました。氏のおかげで神岡での研究が快適なものになりました。

宇宙線研究所の宮川治准教授は学会や修士論文審査会の発表練習に付き合ってください、スライドの見せ方から話し方に至るまで、発表をわかりやすくするための方法を一緒になって考えてくださいました。

宇宙線研究所の山本尚弘助教はコントロールルームにいらっしゃることが多く、デジタルシステムについて分からないことがあるとその都度丁寧かつ分かりやすく教えてくださいました。毎日遅くまで残って研究活動に取り組む氏の姿勢からは、学ぶべきところがたくさんありました。

宇宙線研究所の横澤孝章特任助教は深夜から朝方にかけての作業において測定の手伝いをしていただき、また本論文にもご意見をくださいました。さらに、ご自身の経験をもとに、大学院生として活動する上での助言を数多くしていただきました。

宇宙線研究所の譲原浩貴特任助教には主に、noise budget のツール関連でお世話になりました。夜遅い時間でも質問・提案に応じていただき、大変助かりました。また、いつも明るい氏との会話は研究や修士論文執筆の息抜きでありました。

宇宙線研究所の押野翔一特任助教には KAGRA における DAC について教えてくださいました。また修士論文の進捗も気にかけてくださいました。

国立天文台の鷲見貴生特任助教には書類を添削していただいたり、大学院生および研究者の生活について色々と教えてくださいました。

宇宙線研究所技術専門員の戸村友宣氏は研究や生活の様子を気にかけてくださり、また富山市での生活を色々と教えてくださいました。

宇宙線研究所学術専門職員の PENA ARELLANO, Fabian 氏はいつも陽気に話しかけてくださったほか、DAC ノイズの計算で大変お世話になりました。(PENA ARELLANO, Fabian, an academic specialist at the ICRR, was always cheerfully, and he helped me a lot in the DAC noise calculations.)

宇宙線研究所学術専門職員の安居宏実氏、国立天文台主任技術員の平田直篤氏、国立天文台特任専門員の池田覚氏は坑内作業でお世話になったほか、気さくに話しかけてくださいました。

KEK の鈴木敏一氏、山田智宏氏、Rishabh Bajpai 氏、宇宙線研究所学術専門職員の野手綾子氏には CRY グループのミーティングでお世話になったほか、KEK を訪ねた際はの低温施設を案内して下さったりご自身の研究について教えてくださいました。

宇宙線研究所事務室の舟田真也氏、加藤大地氏、沖中美保子氏、坂本絵里氏、野尻みどり氏には事務手続きで大変お世話になった他、神岡での生活面も気にかけてくださいました。皆様のおかげで何の不自由もなく神岡に出張できました。

また、菊池理恵氏、工藤直美氏には主に出張の手続きでお世話になりました。予約の不備や出張延長・短縮申請などでご迷惑をおかけすることが多々ありましたが、親切に対応して下さりました。

香港中文大学の TSANG, Terrence Tak Lun 氏には制御理論について様々なことを教わりました。正直、最初の頃は氏の言うことが半分も分かりませんでしたが、私が理解するまで付き合ってくださいました。中国に戻ってからポスター発表の資料にメールでアドバイスをくださり、大変助かりました。また、氏の博士論文は非常に興味深く、かつ参考になりました。(TSANG, Terrence Tak Lun from the Chinese University of Hong Kong taught me many things about control theory. To be honest, I couldn't understand half of what he said in the beginning, but he patiently explained to me until I understood. After he returned to China, he helped me by giving advice on my poster presentation by email. Also, his doctoral thesis was very interesting and informative.)

梶田研究室の田中健太氏には干渉計関係の事柄を数多く教えてくださいました。また、遅くまで解析棟に

残って研究以外の話題で盛り上がることも多々ありました。博士論文を抱えているにも関わらず、常に落ち着いた様子で後輩のことも気にかけてくださる氏は非常に頼もしい先輩です。また、新潟大学の廣瀬千晶氏は研究活動から趣味に至るまで様々な話をしていただきました。田中氏、廣瀬氏との会話は修士論文を書く上で息抜きでもあり、刺激でもあって大変楽しかったです。

内山研究室の千葉廉一氏とは顔を合わせる機会こそ少なかったですが、神岡で会うたびに色々な話を聞かせてくれました。研究活動だけでなく、それ以外にも自分のやりたいことを見つけて両方に取り組む氏からは刺激を受けました。また、都丸研究室の西野耀平氏は研究科は違えど、氏が神岡に来た際などに会話をし、その都度知識の深さと理解度の高さに驚かされました。自らの研究に高いレベル、モチベーションで取り組むのは勿論、様々なことを意欲的に勉強する氏の姿からは多くを学びました。

三代木研究室の藤井慎吾氏、内山研究室の宮本慎也氏、山村隼聖氏は対面授業の関係で顔を合わせる機会はそれほどありませんでしたが、セミナーにおける氏らの素晴らしい発表のおかげで、自分もまだまだ勉強しなければならぬと再認識できました。

ここには書ききれませんが、上に挙げた方以外にも本当に多くの方々にご支援をいただきました。深く感謝いたします。

本論文の結びとして、これまでの生活を支えてくれた両親をはじめとする家族に感謝します。大学院まで進学させてくれただけでなく、人生のあらゆる面でサポートしていただきました。本当にありがとうございました。